Kurssin etusivu

KURSSIN TAVOITTEET JA KESKEISET SISÄLLÖT

Matematiikan asema aikamme kulttuurissa edellyttää valmiutta ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa. Sillä on merkittävä tai ratkaiseva rooli muun muassa tieteissä, teknologiassa, taloudessa, yrittäjyydessä, terveydenhuollossa ja turvallisuudessa. Matematiikan opiskelun tehtävänä on tutustuttaa sinut matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa sinua käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitojasi.

Syksystä 2016 lukion matematiikan opiskelu alkaa pitkän ja lyhyen oppimäärän yhteisellä kurssilla. Matematiikan yhteinen kurssi avaa näköaloja matematiikan moninaiseen merkitykseen ihmiselle ja yhteiskunnalle sekä sen ainutlaatuiseen ja kiehtovaan olemukseen tieteenalana. Tässä kurssissa sinulla on tilaisuus vahvistaa pohjaa matematiikan opinnoillesi ja nähdä matematiikka hyödyllisenä ja käyttökelpoisena selitettäessä ja hallittaessa muun muassa yhteiskunnan, talouden ja luonnon tapahtumia ja tilanteita.

Kurssin tavoitteena on, että

- pohdit matematiikan merkitystä yksilön ja yhteiskunnan näkökulmasta
- kertaat ja täydennät lukualueet, kertaat peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskennan periaatteet
- vahvistat ymmärrystäsi funktion käsitteestä
- ymmärrät lukujonon käsitteen
- osaat määrittää lukujonoja, kun annetaan alkuehdot ja tapa, jolla seuraavat termit muodostetaan
- saat havainnollisen käsityksen lukujonon summan määrittämisestä
- osaat ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla
- osaat käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kuvaajan ja lukujonojen tutkimisessa sekä lukujonoihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

KESKEISET SISÄLLÖT

- reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta

- funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta
- lukujono
- rekursiivinen lukujono
- aritmeettinen jono ja summa
- logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys
- muotoa $a^x = b, x$ luonnollinen luku, olevien yhtälöiden ratkaiseminen
- geometrinen jono ja summa

OPISKELUOHJEITA

Kurssimateriaali on jaettu viiteen lukuun: Luvut ja laskutoimitukset, Potenssi ja logaritmi, Lukujonot ja summat, Funktio sekä Prosenttilaskenta.

Pääajatus kurssimateriaalissa on, että matematiikkaa oppii parhaiten tekemällä matematiikkaa. Näin ollen se on kirjoitettu niin, että teet tehtäviä käytännössä koko ajan. Jokainen luku sisältää kolme eri tehtäväsarjaa. Ensimmäisen tehtäväsarjan tehtävät ovat teorian seassa. Tarkoitus on, että etenet materiaalissa tekemällä jokaisen näistä tehtävistä. Voit hyvin tehdä tehtäviä yhdessä kaverin kanssa ja voit kysyä opettajalta heti, jos et ymmärrä jotain asiaa. Asia voi olla jokin tietty tehtävä, teoriassa oleva virke tai esimerkiksi vieras matemaattinen symboli. Pääasia on, että sinä itse teet tehtävät ja ymmärrät, mitä teet. Tämän tehtäväsarjan jälkeen kyseisen luvun teoria on käsitelty ja on aika harjoitella ja syventää juuri opittua. Ennen tätä opettaja pitää ehkä yhteisen opetustuokion tai -keskustelun, jossa pohditaan yhdessä luvun keskeisiä asioita tai työskentelyssä esiin tulleita haastavia kohtia. Mahdollisen opetustuokion jälkeen jatka harjoittelua luvun lopussa olevien kahden tehtäväsarjan tehtävien avulla. Luonnollisesti mitä enemmän harjoittelet, sitä paremmaksi tulet. Kun olet valmis, tee luvun lopussa oleva(t) itsearviointitesti(t). Niiden tarkoitus on kertoa sinulle, oletko ymmärtänyt luvun olennaiset asiat ja kehittää samalla oman oppimisesi arviointia, joka on tärkeä tulevaisuuden taito. Testeissä pärjääminen ei vielä tarkoita, että osaat luvun asiat esimerkiksi kiitettävällä tasolla, vaan testit keskittyvät vahvan perusosaamisen tutkimiseen. Ennen siirtymistä seuraavaan lukuun opettaja haluaa ehkä vielä koota luvussa opittuja asioita sekä antaa palautetta oppimisesta ja sen etenemisestä yhteisessä opetuskeskustelussa.

MATEMATIIKAN MERKITYKSESTÄ YHTEISKUNNALLE JA YKSILÖLLE

Olet opiskellut matematiikkaa koko perusopetuksen ajan, joten nyt lukion matematiikan opiskelun alussa on hyvä hetki pohtia, miksi sitä opiskellaan. Oletkin saattanut pohtia sitä ystäväsi, opettajasi tai vanhempiesi kanssa. Kysymys on saattanut liittyä johonkin tiettyyn matematiikan tunneilla käsiteltyyn aiheeseen tai koko oppiaineeseen. En tiedä, mihin johtopäätökseen mahdollisesti tulit, mutta kuten hyvät kysymykset usein ovat, niihin voi olla vaikeaa vastata.

Voidaan tokki sanoa, että matematiikkaa opiskellaan, jotta sitä voitaisiin soveltaa jossakin ilmeisessä arkisessa toiminnassa kuten kaupankäynnissä, tilastojen tekemisessä tai fysikaalisten ilmiöiden mallintamisessa. Voidaan myös sanoa, että jotakin tiettyä matematiikan aihetta opiskellaan, koska sitä mahdollisesti tarvitaan tulevissa opinnoissa. Haastavaksi vastaamisen tekee se, että matematiikka sisältyy niin erottumattomana osana meidän yhteiskuntaamme ja kulttuuriimme, että emme aina oikein edes huomaa, miten sitä hyödynnetään ympärillämme. Eläimet eivät tarvitse matematiikkaa selvitäkseen hengissä, joten välttämätöntä ihmiskunnan selviämiselle matematiikka ei ole, mutta nykyisenkaltaiselle yhteiskunnalle matematiikka on elintärkeätä.

Tarkastellaan esimerkiksi lukuja. Tähtiteteen professori Tapani Markkanen on todennut, että

> *"lukukäsitteen synty on sekä ihmislajin että yksilön kannalta mullistavimpia edistysaskeleita."*

TEHTÄVÄ 0.1: MIKSI LUVUT OVAT MARKKASEN MIELESTÄ IHMISKUNNALLE NIIN TÄRKEITÄ?

Pohdi parin kanssa, minkälainen ihmiskunta olisi, jos se ei osaisi käsitellä lukumääriä luvuilla. Voisimmeko äänestää? Tietäisimmekö ikämme?

Edellisen tehtävän pohdinnan kautta ehkä huomaat, että matematiikkaa lukujen muodossa on ihmisten luomassa yhteiskunnassa kaikkialla. Vaikka päällisin puolin luvut vaikuttavatkin melko yksinkertaiselta ihmismielen keksinnöltä, niin matematiikan kehitys on vuosituhansien saatossa on puskenut ymmärrystämme lukujen moninaisuudesta eteenpäin.

Kokonaisluvut ovat hyviä lukumäärien laskemiseen, mutta kun halutaan verrata esimerkiksi lukumääriä toisiinsa, huomataan, etteivät ne pelkästään riitä. Esimerkiksi kuinka moninkertaisesti Ronaldo (35) teki maaleja verrattuna Messiin (26) La Ligassa kaudella 2015-2016? Tämän ratkaisemiseen tarvitaan matemaattisia keksintöjä, laskutoimituksia, ja vastaukseksi saatu luku $\frac{35}{26}$ on luku yhden ja kahden välissä, eli se ei ole kokonaisluku. Meidän yhteiskunnassamme murtoluvut ja niillä laskeminen opitaan perusopetuksessa, mutta ihmiskunnalle niiden kehittäminen on ollut suurten ponnistuksien ja oivalluksien tulos.

Murtolukujakin monimukaisempiin lukuihin olet myös törmännyt perusopetuskessa. Yläkoulun matematiikasta muistat ehkä Pythagoraan lauseen, joka sanoo, että suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien a ja b suhde hypotenuusan pituuteen c on

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ehkä sinulle heräsi yläkoulussa kysymys, miksi tällaistakin pitäisi osata. Yksinkertainen vastaus olisi se, että sen avulla pystytään laskemaan erilaisten suorakulmaisten kolmioiden sivujen pituuksia. Tämä on merkittävä syy ja osoittaa Pythagoraan lauseen voiman, sillä se pätee *kaikkiin* suorakulmaisiin kolmioihin. Tämä on kuitenkin vain pintaraapaisu.

Yksi ihmismieltä askarruttanut arvaamaton tulos Pythagoraan lauseesta saadaan, kun laitetaan a:n ja b:n tilalle luku 1. Huomaat, että c saa hyvin oudon arvon. Tämä arvo on esimerkki irrationaaliluvusta, luvusta joka ei ole murtoluku, eli sitä ei voi esittää kahden kokonaisluvun suhteena. Tämän antiikin kreikkalaiset pystyivät todistamaan, ja se saatetaan myös todistaa kurssissa MAA11. Kesti jokunen tuhat vuotta, kunnes äärettömyydestä ja äärettömistä joukoista ymmärrettiin matemaattisesti niin paljon, että 1800-luvulla pystyttiin todistamaan, että näitä irrationaalilukuja on tietyssä mielessä enemmän kuin rationaalilukuja. Kuten matematiikan professori Olli Martio on todennut:

> *"Muutaman tuhannen vuoden takaiset matematiikan tulokset, kuten suorakulmaista kolmiota koskeva Pythagoraan lause, muodostavat edelleen ihmiskunnan kulttuuriperinnön kivijalan."*

Edellä puhuttiin todistamisesta. Pythagoraan lauseen tunsivat viimeistään pythagoralaiset noin 500 e.a.a., mutta mistä tiedämme, että se tosiaan pätee kaikille suorakulmaisille kolmioille? Pystymme *todistamaan* Pythagoraan lauseen todeksi ja olet ehkä nähnyt erilaisia todistuksia sille.

Olemme tottuneita hyödyntämään monia tosina pitämiämme matematiikan tuloksia. Ne erottaa mielipiteistä tai luuloista se, että ne voidaan todistaa paikkaansa pitäviksi. Todistaminen ei aina ole kovin yksinkertaista. Jos olet esimerkiksi alakoulussa oppinut jakamaan lukuja jakokulmassa, et todennäköisesti vielä ole nähnyt todistusta sille, että jakokulma todellakin toimii. Todistus vaatii tiedon jakoyhtälön totuudesta, jota tutkitaan esimerkiksi kurssilla MAA11 tai yliopiston ensimmäisillä algebran kursseilla.

Monia matemaattisia totuuksia ei olla vielä löydetty. Matemaatikot eri puolilla maailmaa työskentelevät paraikaa lukemattomien matemaattisten ongelmien parissa, etsien niiden totuutta. Yksi maailman tunnetuimmista matemaattisista ongelmista oli, onko olemassa positiiviset kokonaisluvut a, b ja c, jotka toteuttavat Pythagoraan lauseen yhtälöä muistuttavan yhtälön

$$a^n + b^n = c^n,$$

jos n on lukua 2 suurempi luonnollinen luku. Kysymyksen esitti antiikin kreikkalainen matemaatikko Diofantos ja ranskalainen matemaatikko Pierre Fermat kirjoitti 1600-luvulla löytäneensä vastauksen. Hänen vastaustaan ei kuitenkaan koskaan löydetty.

Kului yli 300 vuotta ja useiden aikansa nerokkaimpien matemaatikoiden yrityksiä kunnes brittiläinen matemaatikko Andrew Wiles selvitti tämän Fermat'n suureksi lauseeksi kutsutun ongelman. Vastaus on, että sellaista lukua n ei ole olemassa. Tämän selvittämiseksi Wiles joutui kehittämään runsaasti uutta matemaattista teoriaa.

TEHTÄVÄ 0.2: RATKAISEMATON ONGELMA

Etsi yksi matemaattinen ongelma, jota ihmiskunta ei vielä ole pystynyt ratkaisemaan. Sinun ei tarvitse kokonaan ymmärtää mistä ongelmassa on kyse, mutta yritä selittää se ystävällesi niin hyvin kuin pystyt.

VINKKI

Laita hakukoneeseen “Luettelo ratkaisemattomista matemaattisista ongelmista”.

Sinulle on ehkä kerrottu, että matematiikan opiskelu harjaannuttaa ajattelun taitoa. Tämä ei luonnollisesti ole matematiikan erityisoikeus, vaan eri oppiaineet harjaannuttavat erilaisia ajattelun taitoja. Kuten yllä on pohdittu, voidaan kuitenkin sanoa, että ihmiskunnan kehityksen kannalta matemaattisen ajattelun merkitys on ollut merkittävä.

Matematiikka on aikojen saatossa kehittynyt monitahoiseksi tieteeksi. Kansainvälisessä luokittelussa matematiikka on jaettu noin 50 pääryhmään ja nämä edelleen aliryhmiin. Kussakin näistä on omat avoimet ongelmansa, joita matemaatikot ympäri maailmaa yrittävät ratkaista. Esimerkiksi algebra tutkii laskutoimituksia, geometria ja logiikka todistamista sekä matematiikan perusteita.

Akateemikko Olli Lehto on todennut:

> *"Pohjimmaltaan paljolti matematiikkaan perustuva luonnontieteellis-teknologinen tieto on edellytyksenä menestymiseen taloudellisessa kilpailussa, se on pohjana yhteiskuntaa ohjaaville poliittisille päätöksille, ja sitä tarvitaan kestävän kehityksen turvaamisessa."*

Kuka tietää mikä matematiikan ja matemaattisen ajattelun muoto seuraavaksi mullistaa yhteiskuntaamme!

Luvut ja laskutoimitukset

LUVUN TAVOITTEET

Tämän luvun tavoitteena on, että hallitset reaalilukujen peruslaskutoimitukset ja laskujärjestyksen. Osaat

- antaa esimerkkejä eri lukualueisiin kuuluvista luvuista
- päätellä lopputuloksen etumerkin yhteen- ja vähennyslaskussa sekä kerto- ja jakolaskussa
- laskea murtolukujen summia, erotuksia, tuloja ja osamääriä
- muodostaa annetun luvun vastaluvun ja käänteisluvun
- muuttaa sekaluvun tai desimaalimuodossa esitetyn rationaaliluvun murtolukumuotoon
- hyödyntää reaalilukujen laskulakeja päässälaskujen helpottamisessa.

Lisäksi tiedät, että määritelmä on matematiikassa sopimus siitä, mitä jollakin käsitteellä tarkoitetaan.

LUONNOLLISET LUVUT JA KOKONAISLUVUT

Aloitamme tämän kappaleen tekemällä sopimuksen siitä, mitä tarkoitetaan, kun puhutaan luonnollisista luvuista. Tällaista sopimusta siitä, mitä jokin nimitys tarkoittaa, sanotaan matematiikassa *määritelmäksi*. Luonnollisten lukujen määritelmä siis kertoo, mitä luonnollisilla luvuilla tarkoitetaan.

MÄÄRITELMÄ: LUONNOLLISET LUVUT

Lukumäärien ilmaisemiseen käytettäviä lukuja $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ kutsutaan *luonnollisiksi luvuiksi*. Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{N}$. Siis

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Luonnollisten lukujen määritelmästä on kaksi erilaista versiota. Tällä kurssilla käytetään edellä esitettyä määritelmää, jonka mukaan myös luku 0 on luonnollinen luku. Joissakin kirjoissa käytössä on määritelmä, jossa luonnollisilla luvuilla tarkoitetaan lukuja $1, 2, 3, 4, \ldots$. Siitä, kumpi määritelmä on parempi, ei ole päästy yksimielisyyteen.

Luonnollisia lukuja voidaan laskea yhteen ja kertoa keskenään, ja tulos on aina luonnollinen luku. Vähennyslaskun ja jakolaskun tulokset sen sijaan eivät välttämättä ole luonnollisia lukuja. Jotta kaikki vähennyslaskut voidaan laskea, täytyy siirtyä luonnollisten lukujen joukosta kokonaislukujen joukkoon.

TEHTÄVÄ 1.1: LUONNOLLISTEN LUKUJEN YHTEEN- JA KERTOLASKU

(a) Tee piirros, joka havainnollistaa laskutoimitusta $2 + 4$.

(b) Tee piirros, joka havainnollistaa laskutoimitusta $2 \cdot 3$.

(c) Tee piirros, joka havainnollistaa laskutoimitusta $3 \cdot 2$.

(d) Mitä eroa b- ja c-kohtien laskuilla on? Entä mitä yhteistä niillä on?

TEHTÄVÄ 1.2: LUONNOLLISISTA LUVUISTA KOKONAISLUKUIHIN

(a) Keksi esimerkki luonnollisista luvuista m ja n, joilla erotus $m - n$ on luonnollinen luku.

(b) Keksi esimerkki luonnollisista luvuista m ja n, joilla erotus $m - n$ ei ole luonnollinen luku.

(c) Mikä ehto lukujen m ja n pitää toteuttaa, jotta erotus $m - n$ on luonnollinen luku? Selitä omin sanoin.

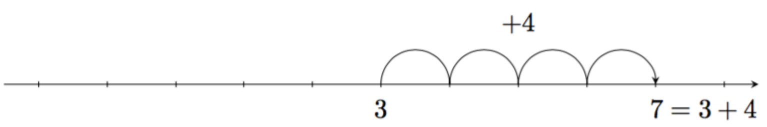
Sovitaan seuraavaksi, mitä tarkoitetaan, kun puhutaan kokonaisluvuista:

MÄÄRITELMÄ: KOKONAISLUVUT

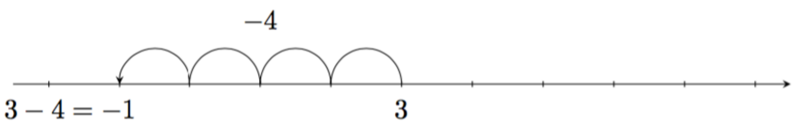
Kokonaislukuja ovat luvut $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$. Kokonaislukujen joukkoa merkitään kirjaimella Z. Siis

$$\mathrm{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslaskua voi havainnollistaa lukusuoralla. Tarkastellaan aluksi summaa $3 + 4$ ja erotusta $3 - 4$. Luvun 4 lisääminen vastaa lukusuoralla siirtymistä neljä yksikköä oikealle:



Luvun 4 vähentäminen vastaa puolestaan siirtymistä neljä yksikköä vasemmalle:



TEHTÄVÄ 1.3: YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

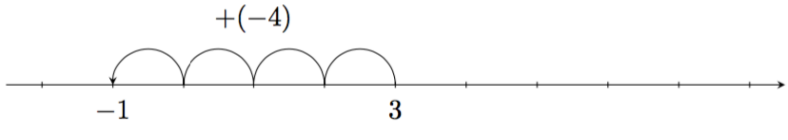
Havainnollista lukusuoralla samaan tapaan kuin edellä

(a) summaa $-2 + 5$

(b) erotusta $-2 - 5$.

Entä miten tulkitaan summa $3 + (-4)$? Negatiivisen luvun lisääminen tulkitaan vähennyslaskuna:

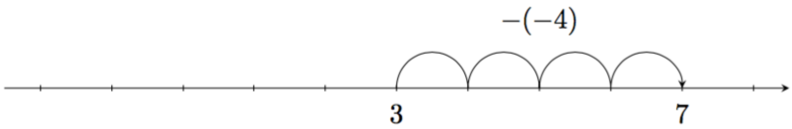
$$3 + (-4) = 3 - 4.$$



Tämä on järkevä tulkinta myös siksi, että arkijärjenkin mukaan laskuista $3 + 4$ ja $3 + (-4)$ täytyy tulla eri tulos. Jos lukuun 3 lisätään luku 4, liikutaan lukusuoraa oikealle. Jos lukuun 3 lisätään luku -4, on tällöin loogista liikkua lukusuoraa vasemmalle.

Tarkastellaan vielä erotusta $3 - (-4)$. Edellä todettiin, että jos lukuun 3 lisätään luku -4, liikutaan lukusuoraa vasemmalle. Nyt luvusta 3 vähennetään sama luku -4, joten on loogista liikkua lukusuoraa päinvastaiseen suuntaan eli oikealle. Negatiivisen luvun vähentäminen antaa siis saman tuloksen kuin positiivisen luvun lisääminen:

$$3-(-4)=3+4.$$



TEHTÄVÄ 1.4: YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

Havainnollista lukusuoralla samaan tapaan kuin edellä

(a) summaa $-2+(-5)$

(b) erotusta $-2-(-5)$.

Kokonaislukujen joukossa kaikilla luvuilla on olemassa niin sanottu vastaluku. Seuraavassa määritelmässä sovitaan, mitä vastaluku tarkoittaa:

MÄÄRITELMÄ: VASTALUKU

Luvun a *vastaluku* $-a$ tarkoittaa lukua, joka lisättynä lukuun a antaa tuloksen 0:

$$a+(-a)=0.$$

TEHTÄVÄ 1.5: VASTALUKU

(a) Mikä on luvun 3 vastaluku?

(b) Mikä on luvun -6 vastaluku? Kirjoita vastaus kahdella erilaisella tavalla.

(c) Merkitse kaikki a- ja b-kohtien luvut lukusuoralle. Vertaa luvun ja sen vastaluvun etäisyyttä nollaan. Mitä voit sanoa siitä? Selitä omin sanoin.

Vastaluvun avulla erotus voidaan muuttaa summaksi, sillä kuten edellä todettiin, vastaluvun lisääminen vastaa vähennyslaskua: $3-4=3+(-4)$. Toisaalta summa voidaan muuttaa erotukseksi, sillä vastaluvun vähentäminen vastaa yhteenlaskua: $3+4=3-(-4)$.

TEHTÄVÄ 1.6: VASTALUKU

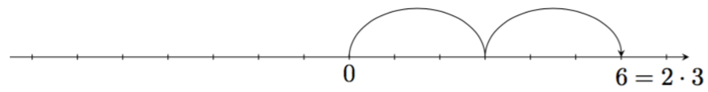
(a) Kirjoita erotukset $15-(-8)$ ja $-23-4$ summina. Tarkista laskemalla tulokset.

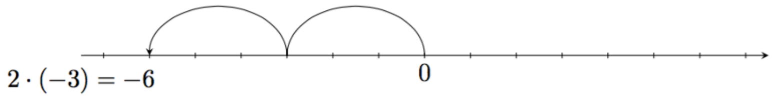
(b) Kirjoita summat $75+(-32)$ ja $843+59$ erotuksina. Tarkista laskemalla tulokset.

(c) Muodosta sääntö, jolla voit kirjoittaa erotuksen $a-b$ summana.

(d) Muodosta sääntö, jolla voit kirjoittaa summan $a+b$ erotuksena.

Myös kokonaislukujen kertolaskua voi havainnollistaa lukusuoralla. Esimerkiksi tuloja $2 \cdot 3$ ja $2 \cdot (-3)$ on havainnollistettu alla:





Entä miten päätellä sellaisten tulojen etumerkki, joissa ensimmäinen tulon tekijä on negatiivinen? Se onnistuu vastaluvun käsitteen avulla. Esimerkiksi tuloa $-2 \cdot 3$ voidaan ajatella edellä havainnollistetun tulon $2 \cdot 3$ vastalukuna, joten

$$-2 \cdot 3 = -6.$$

Tuloa $-2 \cdot (-3)$ voidaan puolestaan ajatella edellä havainnollistetun tulon $2 \cdot (-3)$ vastalukuna, joten

$$-2 \cdot (-3) = -(-6) = 6.$$

TEHTÄVÄ 1.7: TULON ETUMERKKI

(a) Keksi kaksi esimerkkiä tilanteista, joissa kertolaskun ab tulos on positiivinen.

(b) Keksi kaksi esimerkkiä tilanteista, joissa kertolaskun ab tulos on negatiivinen.

(c) Selitä omin sanoin, milloin kertolaskun ab tulos on positiivinen ja milloin negatiivinen.

(d) Millaisissa tilanteissa kertolaskun ab tulos on nolla?

TEHTÄVÄ 1.8: KERTOLASKU

Laske seuraavat tulot:

(a) $7 \cdot 4$

(b) $-8 \cdot (-7)$

(c) $-5 \cdot 4$

(d) $9 \cdot (-3)$

RATIONAALILUVUT

Kokonaislukujen summat, erotukset ja tulot ovat aina kokonaislukuja. Kahden kokonaisluvun osamäärä sen sijaan ei välttämättä ole kokonaisluku. Jotta kaikki jakolaskut voidaan laskea, täytyy siirtyä kokonaislukujen joukosta rationaalilukujen joukkoon.

TEHTÄVÄ 1.9: KOKONAISLUVUISTA RATIONAALILUKUIHIN

Keksi esimerkki kokonaisluvuista m ja n, joilla osamäärä $\frac{m}{n}$

(a) on kokonaisluku.

(b) ei ole kokonaisluku.

(c) Mikä ehto lukujen m ja n pitää toteuttaa, jotta tarkasteltu osamäärä on kokonaisluku? Selitä omin sanoin.

MÄÄRITELMÄ: RATIONAALILUVUT

Rationaalilukuja ovat luvut, jotka voidaan kirjoittaa murtolukumuodossa

$$\frac{m}{n},$$

missä *osoittaja* m ja *nimittäjä* n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$.
Rationaalilukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{Q}$.

TEHTÄVÄ 1.10: RATIONAALILUVUT

Ovatko seuraavat luvut rationaalilukuja? Esitä ne murtolukumuodossa, jos mahdollista.

(a) 3

(b) $0,5$

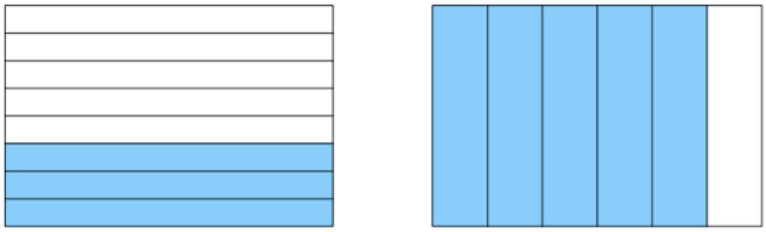
(c) $-0,1$

(d) $0,75$.

Jos murtolukumuodossa esitettyjä rationaalilukuja lasketaan yhteen, pitää luvut ensin laventaa samannimisiksi. Tarkastellaan esimerkiksi summaa

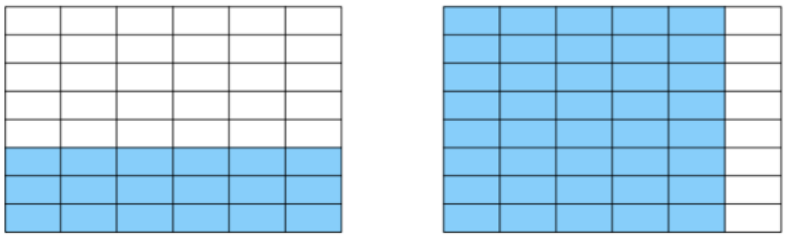
$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6}.$$

Siinä esiintyviä lukuja voidaan havainnollistaa alla olevilla piirroksilla.

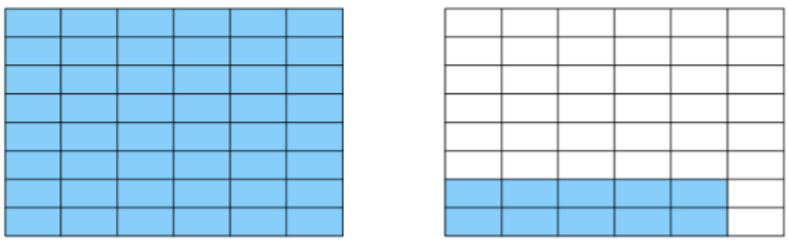


Ensimmäisessä suorakulmiossa sinisellä on väritetty kolme kahdeksasosaa koko suorakulmiosta. Toisessa suorakulmiossa sinisellä on väritetty viisi kuudesosaa koko suorakulmiosta.

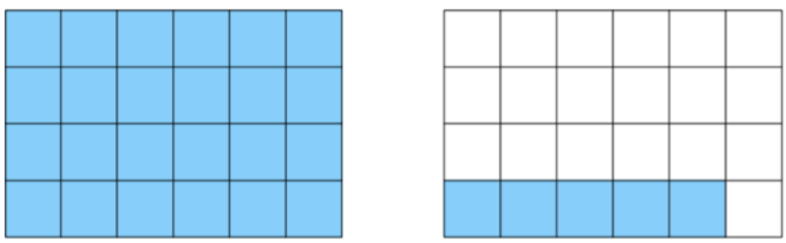
Jaetaan ensimmäinen suorakulmio pystysuunnassa kuuteen osaan ja toinen suorakulmio vaakasuunnassa kahdeksaan osaan, jolloin tilanne näyttää tältä:



Näin kumpikin suorakulmio tulee jaetuksi 48 osaan. Kuvioista voidaan laskea, että ensimmäisessä suorakulmiossa sinisellä on väritetty $\frac{18}{48}$ koko suorakulmiosta. Toisessa suorakulmiossa sinisellä on väritetty $\frac{40}{48}$ koko suorakulmiosta. Järjestetään palat uudelleen siirtämällä mahdollisimman monta väritettyä palaa ensimmäiseen suorakulmioon. Näin nähdään, että yhteensä sinisellä on väritetty yksi kokonainen suorakulmio ja lisäksi $\frac{10}{48}$ toisesta suorakulmiosta eli yhteensä $\frac{58}{48}$ yhden suorakulmion pinta-alasta.



Piirroksesta nähdään, että joka toinen vaakasuuntainen jakoviiva voidaan jättää pois:



Tulos voidaan siis ilmoittaa supistetussa muodossa

$$\frac{29}{24}.$$

TEHTÄVÄ 1.11: YHTEENLASKU

Tehtävänä on laskea summa $\frac{2}{5} + \frac{1}{6}$.

(a) Piirrä kaksi samanlaista suorakulmiota. Havainnollista kumpaakin yhteenlaskettavaa värittämällä sitä vastaava osa suorakulmiosta. Jaa ensimmäinen suorakulmio sopiviin osiin vaakaviivoilla ja toinen pystyviivoilla.

(b) Lavenna yhteenlaskettavat samannimisiksi jakamalla kumpikin suorakulmio vielä pienempiin osiin samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä.

(c) Laske summa ja havainnollista tulosta piirtämällä kolmas suorakulmio. Tarkista, että tulos ja piirrokset ovat sopusoinnussa keskenään.

Edellä havaittiin piirroksen avulla, että

$$\frac{58}{48} = \frac{29}{24}.$$

Tähän tulokseen päästään myös huomaamalla, että sekä osoittaja 58 että nimittäjä 48 ovat kahdella jaollisia. Voidaankin kirjoittaa

$$\frac{58}{48} = \frac{2 \cdot 29}{2 \cdot 24}.$$

Kahdella kertominen ja jakaminen kumoavat toisensa, joten ne voidaan supistaa pois:

$$\frac{58}{48} = \frac{29}{24}.$$

Luku 29 ei ole jaollinen millään ykköstä suuremmalla luvulla paitsi itsellään, joten supistamista ei voi jatkaa tämän pidemmälle.

TEHTÄVÄ 1.12: SUPISTAMINEN

Supista seuraavat luvut mahdollisimman pitkälle:

(a) $\frac{2}{4}$

(b) $\frac{8}{12}$

(c) $\frac{15}{35}$

(d) $\frac{20}{100}$.

TEHTÄVÄ 1.13: SUPISTAMINEN

Kaksi opiskelijaa treenasi murtoluvuilla laskemista. Opiskelija A laski oman tehtävänsä seuraavasti:

$$\frac{6+8}{3} = 2 + 8 = 10.$$

Opiskelija B puolestaan laski oman tehtävänsä näin

$$\frac{6 \cdot 8}{3} = 2 \cdot 8 = 16.$$

(a) Mitä eroa opiskelijoiden A ja B tehtävillä oli? Selitä omin sanoin.

(b) Kumpi heistä päätyi oikeaan lopputulokseen omassa laskussaan? Missä toinen teki virheen?

(c) Kirjoita ohje, jonka avulla tällaisilta virheiltä vältytään jatkossa.

TEHTÄVÄ 1.14: VÄHENNYSLASKU

Tehtävänä on laskea erotus $\frac{6}{7} - \frac{3}{5}$.

(a) Piirrä kaksi samanlaista suorakulmiota. Havainnollista kumpaakin yhteenlaskettavaa värittämällä sitä vastaava osa suorakulmiosta. Jaa ensimmäinen suorakulmio sopiviin osiin vaakaviivoilla ja toinen pystyviivoilla.

(b) Lavenna yhteenlaskettavat samannimisiksi jakamalla kumpikin suorakulmio vielä pienempiin osiin samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä.

(c) Laske erotus ja havainnollista tulosta piirtämällä kolmas suorakulmio. Tarkista, että tulos ja piirrokset ovat sopusoinnussa keskenään.

TEHTÄVÄ 1.15: YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

Laske

(a) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

(b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$

(c) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9}$

(d) $\frac{3}{5} - \frac{3}{4}$.

TEHTÄVÄ 1.16: YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

Muodosta sääntö, jonka mukaan saadaan laskettua

(a) summa $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

(b) erotus $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

Voit selittää omin sanoin ja käyttää apuna edellisiä tehtäviä.

Kun murtolukua kerrotaan kokonaisluvulla, voidaan tilanne palauttaa yhteenlaskuun. Esimerkiksi

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2+2+2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}.$$

TEHTÄVÄ 1.17: KOKONAISLUVULLA KERTOMINEN

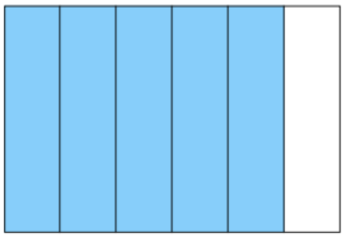
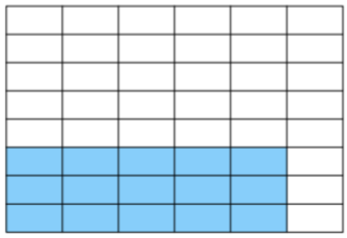
(a) Laske $5 \cdot \frac{2}{13}$.

(b) Muodosta sääntö, jonka mukaan saadaan laskettua tulo $a \cdot \frac{b}{c}$.

Tarkastellaan seuraavaksi tuloa

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$$

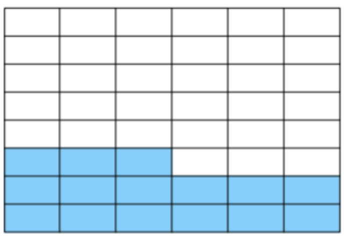
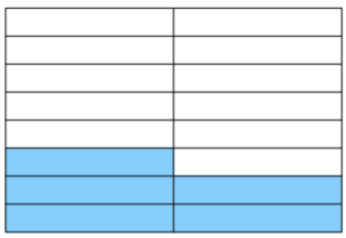
Tämä kertolasku voidaan tulkita niin, että otetaan kolme kahdeksasosaa luvusta $\frac{5}{6}$:

Ensimmäisessä suorakulmiossa sinisellä on väritetty viisi kuudesosaa koko suorakulmiosta. Toisessa suorakulmiossa tästä väritetystä alueesta on otettu kolme kahdeksasosaa, jolloin jäljelle on jäänyt

$$\frac{15}{48}.$$

Jäljelle jääneet väritetyt palat voidaan järjestää uudelleen, jolloin huomataan, että pystysuuntaisia jakoviivoja voidaan vähentää:

Tulos voidaan siis ilmoittaa supistetussa muodossa

$$\frac{5}{16}.$$

TEHTÄVÄ 1.18: KERTOLASKU

Edellä pääteltiin, että

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48}.$$

(a) Selitä omin sanoin, mitä murtolukujen osoittajille ja nimittäjille pitää tehdä, että päätyy tällaiseen tulokseen.

(b) Muodosta sääntö, jonka mukaan saadaan laskettua tulo $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

TEHTÄVÄ 1.19: KERTOLASKU

Tehtävänä on laskea tulo $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}$.

(a) Piirrä kaksi samanlaista suorakulmiota. Jaa ensimmäinen suorakulmio vaaka- tai pystyviivoilla kuuteen osaan ja väritä siitä yksi kuudesosa.

(b) Jaa toinen suorakulmio samalla tavalla kuuteen osaan ja sen jälkeen toisessa suunnassa viiteen osaan. Väritä kaksi viidesosaa siitä alueesta, jonka väritit ensimmäisestä suorakulmiosta.

(c) Päättele kertolaskun tulos piirroksestasi. Saatko saman tuloksen laskemalla? Jos mahdollista, supista lopputulos.

TEHTÄVÄ 1.20: KERTOLASKU

Laske

(a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$

(b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}$

(c) $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{9}$

(d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8}$.

MÄÄRITELMÄ: KÄÄNTEISLUKU

Oletetaan, että a on rationaaliluku ja $a \neq 0$. Luvun a *käänteisluku*

$$\frac{1}{a}$$

tarkoittaa lukua, joka luvulla a kerrottuna antaa tuloksen 1:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

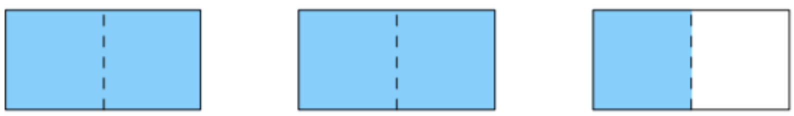
TEHTÄVÄ 1.21: KÄÄNTEISLUKU

(a) Mikä on luvun 4 käänteisluku? Anna vastaus murtolukumuodossa ja desimaalilukumuodossa.

(b) Mikä on luvun $\frac{2}{3}$ käänteisluku? Anna vastaus murtolukumuodossa ja desimaalilukumuodossa.

Tutkitaan vielä rationaalilukujen jakolaskua. Aloitetaan yksinkertaisesta tapauksesta: miten voi havainnollistaa jakolaskua $5 : 2$? Alla on kuvattu luku 5 viitenä värillisenä neliönä.

Kun luku 5 jaetaan kahdella, katsotaan, kuinka monta kahden neliön kokoista suorakulmiota näistä värillisistä neliöistä voidaan muodostaa:



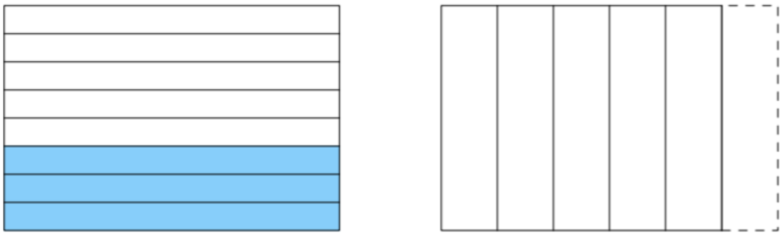
Nähdään, että kahden neliön kokoisia suorakulmioita saadaan $2,5$. Siis

$$\frac{5}{2} = 2,5.$$

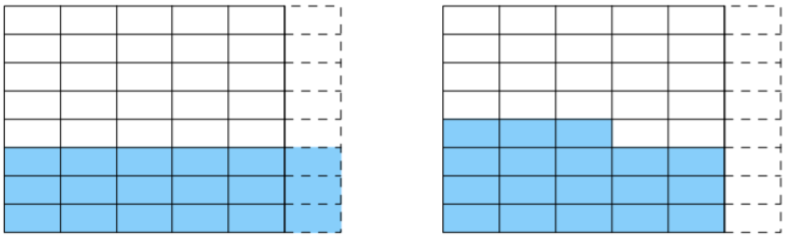
Tarkastellaan seuraavaksi jakolaskua

$$\frac{3}{8} : \frac{5}{6}$$

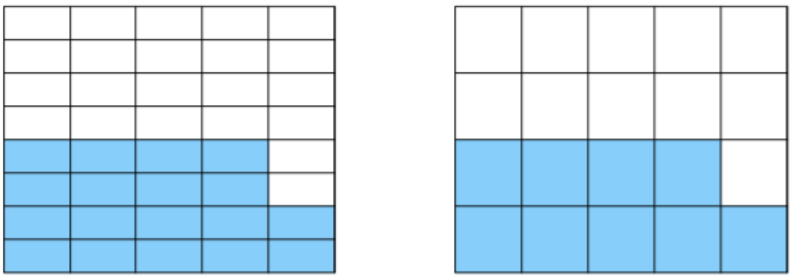
Toimitaan samaan tapaan kuin edellä. Katsotaan, kuinka monta viittä kuudesosaa voidaan muodostaa kolmesta kahdeksasosasta:



Ensimmäisessä suorakulmiossa sinisellä on väritetty kolme kahdeksasosaa koko suorakulmiosta. Yritetään täyttää väritetyllä alueella viisi kuudesosaa toisesta suorakulmiosta. Paloja järjestelemällä huomataan, että halutusta alueesta saadaan täytettyä $\frac{18}{40}$:



Väritetyt palat voidaan järjestää uudelleen, jolloin huomataan, että pystysuuntaisia jakoviivoja voidaan vähentää:



Tulos voidaan siis ilmoittaa supistetussa muodossa

$$\frac{9}{20}.$$

TEHTÄVÄ 1.22: JAKOLASKU

Edellä pääteltiin, että

$$\frac{3}{8} : \frac{5}{6} = \frac{18}{40}.$$

(a) Millä luvulla luku $\frac{3}{8}$ pitäisi , että tuloksena olisi $\frac{18}{40}$?

(b) Muodosta sääntö, jonka mukaan jakolasku $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ muutetaan kertolaskuksi.

TEHTÄVÄ 1.23: JAKOLASKU

Tehtävänä on laskea osamäärä $\frac{3}{5} : \frac{6}{7}$.

(a) Piirrä kaksi samanlaista suorakulmiota. Jaa ensimmäinen suorakulmio vaakaviivoilla viiteen osaan ja väritä siitä kolme viidesosaa. Jaa ensimmäinen suorakulmio tämän jälkeen pystyviivoilla seitsemään osaan.

(b) Jaa toinen suorakulmio samalla tavalla vaakasuunnassa viiteen osaan ja pystysuunnassa suunnassa seitsemään osaan. Väritä yhtä monta pientä suorakulmiota kuin ensimmäisessäkin suorakulmiossa, mutta niin, että viimeinen pystysarake jää tyhjäksi.

(c) Päättele jakolaskun tulos piirroksesestasi. Saatko saman tuloksen laskemalla? Jos mahdollista, supista lopputulos.

TEHTÄVÄ 1.24: JAKOLASKU

Laske

(a) $\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$

(b) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{4} : \frac{5}{8}$.

TEHTÄVÄ 1.25: MURTOLUVUILLA LASKEMINEN

Harjoittele murtoluvuilla laskemista tämän pelin avulla. Saat käyttää kynää ja paperia apuna. Pelin tavoitteena on saada kymmenen oikeaa vastausta peräkkäin.

Pelissä käytetään jakoviivana merkkiä /. Esimerkiksi yksi kolmasosa merkitään 1/3. Anna vastaukset mahdollisimman supistetussa muodossa.

Joskus murtolukujen yhteydessä esiintyy niin sanottuja *sekalukuja*. Esimerkiksi luku $\frac{7}{3}$ saatetaan ilmoittaa muodossa

$$2\frac{1}{3}.$$

Tästä merkinnästä näkyy suoraan luvun *kokonaisosa*, joka on 2. Sekaluku on oikeastaan lyhennysmerkintä summalle:

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Sekalukumuodossa annetut luvut kannattaakin aina muuttaa tavalliseen murtolukumuotoon ennen laskutoimituksia. Huomaa, että negatiivisen sekaluvun etumerkki vaikuttaa myös murtolukuosaan:

$$\begin{aligned} -7\frac{9}{10} &= -\left(7+\frac{9}{10}\right) \\ &= -7-\frac{9}{10} \\ &= -\frac{70}{10}-\frac{9}{10} \\ &= -\frac{79}{10}. \end{aligned}$$

TEHTÄVÄ 1.26: SEKALUVUT

(a) Muuta luvut $4\frac{1}{2}$ ja $-6\frac{11}{46}$ murtolukumuotoon.

(b) Muuta luvut $\frac{12}{5}$ ja $-\frac{16}{6}$ sekalukumuotoon.

Rationaaliluvut voidaan murtolukumuodon lisäksi esittää desimaalimuodossa. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \frac{3365}{673} &= 5 \\ \frac{45}{8} &= 5{,}625 \\ \frac{3}{22} &= 0{,}1363636363636\ldots \end{aligned}$$

Rationaaliluvun desimaalimuoto voi siis olla päättyvä, tai päättymätön ja jaksollinen. Joillakin rationaaliluvuilla jakso on niin pitkä, että laskimen antama likiarvo näyttää jaksottomalta: esimerkiksi

$$\frac{18}{295} = 0{,}061016949153\ldots$$

Voidaan kuitenkin osoittaa, että kaikki rationaalilukujen päättymättömät desimaalikehitelmät ovat jaksollisia.

TEHTÄVÄ 1.27: DESIMAALIMUODOSTA MURTOLUKUMUOTOON

Muuta murtolukumuotoon ja supista mahdollisimman pitkälle

(a) $0,1$

(b) $0,64$

(c) $2{,}376$.

TEHTÄVÄ 1.28: DESIMAALIMUODOSTA MURTOLUKUMUOTOON

Tehtävänä on muuttaa luku $q = 0{,}618181818\ldots$ murtolukumuotoon.

(a) Kerro luku q luvulla 100.

(b) Laske erotus $100q - q$. Onko sen desimaalimuoto päättyvä vai päättymätön?

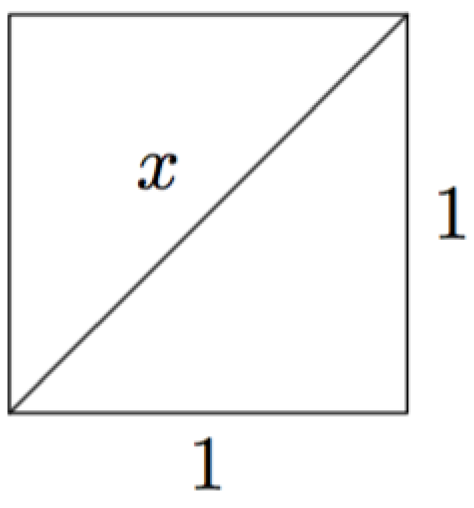
(c) Mitä on $99q$? Ratkaise saamastasi yhtälöstä luvun q murtolukumuoto. Tarvittaessa lavenna niin, että sekä osoittaja että nimittäjä ovat kokonaislukuja. Supista lopuksi, jos mahdollista.

TEHTÄVÄ 1.29: DESIMAALIMUODOSTA MURTOLUKUMUOTOON

Sovella edellisen tehtävän menetelmää ja muuta luku $q = 0{,}9999999\ldots$ murtolukumuotoon.

REAALILUVUT

Edes rationaaliluvut eivät riitä kaikkien asioiden mittaamiseen. Esimerkiksi alla kuvatun neliön, jonka sivun pituus on 1, halkaisijan pituus x on luku, jota ei voi esittää murtolukumuodossa.



Pythagoraan lauseen mukaan halkaisijan pituus saadaan yhtälöstä

$$1^2 + 1^2 = x^2$$

eli

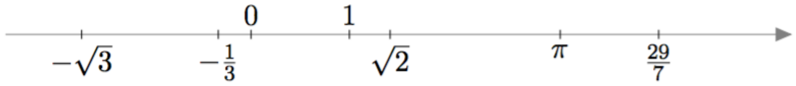
$$x^2 = 2.$$

On kuitenkin mahdollista näyttää, että minkään rationaaliluvun toinen potenssi ei ole 2. Tästä voidaan päätellä, että halkaisijan pituus x ei ole rationaaliluku.

Sitä positiivista lukua, jonka toinen potenssi on 2, merkitään $\sqrt{2}$. Edellä tarkasteltu halkaisijan pituus on siis $x = \sqrt{2}$. Sille voidaan laskea likiarvo: $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$.

Luku $\sqrt{2}$ on yksi esimerkki *irrationaaliluvusta* eli lukusuoran luvusta, jota ei voi esittää murtolukumuodossa. Muita irrationaalilukuja ovat esimerkiksi $\sqrt{3}$ ja π.

Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut yhdessä muodostavat *reaalilukujen joukon*. Reaalilukujen joukkoa havainnollistetaan usein lukusuoralla, jonka jokainen piste esittää reaalilukua ja toisaalta jokaisella reaaliluvulla on vastinpisteensä.



Jokainen reaaliluku voidaan esittää desimaalimuodossa ainakin yhdellä tavalla. Kuten aikaisemmin todettiin, rationaalilukujen desimaalikehitelmät ovat päättyviä, tai päättymättömiä ja jaksollisia. Irrationaalilukujen desimaalikehitelmät puolestaan ovat päättymättömiä ja jaksottomia.

TEHTÄVÄ 1.30: REAALILUKUJEN DESIMAALIKEHITELMÄT

Keksi jokin reaaliluku, jolla on kaksi erilaista desimaalikehitelmää. Millaiset ne ovat? *Vihje: tehtävä 29.*

Jotta laskutoimituksia yhdistettäessä ei tarvittaisi valtavaa määrää sulkuja laskujärjestyksen osoittamiseksi, on sovittu peruslaskutoimitusten laskujärjestys, jota kaikki reaaliluvut noudattavat. Miten sen mukaan lasketaan esimerkiksi seuraavan lausekkeen arvo?

$$7 - 6^2 : 4 \cdot 2 + (3 - 8)^2 \cdot 9 + 1$$

Laskujärjestys on seuraava:

1. Ensimmäisenä lasketaan sulkulausekkeet. Jos lausekkeessa on useita sulkeita, laskeminen aloitetaan sisimmistä sulkeista ja edetään ulospäin. Esimerkkilausekkeemme näyttää tämän vaiheen jälkeen seuraavalta:

$$7 - 6^2 : 4 \cdot 2 + (-5)^2 \cdot 9 + 1.$$

2. Seuraavaksi lasketaan potenssit. Esimerkkilausekkeemme näyttää tämän vaiheen jälkeen seuraavalta:

$$7 - 36 : 4 \cdot 2 + 25 \cdot 9 + 1.$$

3. Tämän jälkeen lasketaan kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle. Esimerkkilausekkeemme näyttää tämän vaiheen jälkeen seuraavalta:

$$7 - 18 + 225 + 1.$$

4. Viimeisenä lasketaan yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle. Vastaukseksi saamme siis

$$215.$$

TEHTÄVÄ 1.31: LASKUJÄRJESTYS

Laske seuraavien lausekkeiden arvo:

(a) $8 \cdot 7 - 48 : 8 + 4$

(b) $8 \cdot 7 - 48 : (8 + 4)$

(c) $8 \cdot (7 - 48 : 8 + 4)$

(d) $8 \cdot 7 - (48 : 8 + 4)$

TEHTÄVÄ 1.32: LASKUJÄRJESTYS

Harjoittele oikeaa laskujärjestystä tämän pelin avulla. Saat käyttää kynää ja paperia apuna. Pelin tavoitteena on saada kymmenen oikeaa vastausta peräkkäin.

Reaalilukujen yhteenlaskun tutut ominaisuudet on nimetty seuraavasti:

- *Vaihdannaisuus* tarkoittaa, että yhteenlaskettavien järjestyksen voi vaihtaa:

$$a + b = b + a.$$

- *Liitännäisyys* tarkoittaa, että peräkkäiset yhteenlaskut voi suorittaa yhtä hyvin järjestyksessä vasemmalta oikealle tai oikealta vasemmalle:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

  Koska tulos on sama riippumatta siitä, miten sulut on asetettu, ne voidaan myös jättää kokonaan pois.

- *Osittelulain* mukaan sulut voidaan kertoa auki tai voidaan erottaa yhteinen tekijä:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

TEHTÄVÄ 1.33: LASKULAIT

Selitä omin sanoin, mitä tarkoittaa reaalilukujen kertolaskun

(a) vaihdannaisuus

(b) liitännäisyys.

Keksi lisäksi esimerkit, jotka havainnollistavat näitä ominaisuuksia.

TEHTÄVÄ 1.34: LASKULAIT

Tehtävänä on muokata seuraavat laskut vaihdannaisuuden, liitännäisyyden ja osittelulain avulla sellaiseen muotoon, että ne on mahdollisimman helppo laskea päässä.

(a) Laske liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta hyödyntäen $917 + (856 + 83)$.

(b) Laske liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta hyödyntäen $(4 \cdot 76) \cdot 250$.

(c) Laske osittelulakia hyödyntäen $769 \cdot 7 + 769 \cdot 3$.

(d) Laske osittelulakia hyödyntäen $25 \cdot 42$.

TEHTÄVÄSARJA II

TEHTÄVÄ 1.35: SUMMA JA EROTUS

Ilmaise luku -5 mahdollisimman monella tavalla summana tai erotuksena lukujen 4 ja 9 sekä niiden vastalukujen avulla. Keksitkö neljä erilaista tapaa?

TEHTÄVÄ 1.36: LASKUJÄRJESTYS

Laske päässä

(a) $20 - 3 \cdot 4 + 5$

(b) $20 - (3 \cdot 4 + 5)$

(c) $(20 - 3) \cdot 4 + 5$

Onko a-kohdan lausekkeeseen mahdollista lisätä sulkuja vielä jollakin tavalla niin, että tulos ei ole mikään edellisistä? Saat käyttää niin paljon sulkuja kuin haluat.

VASTAUS

(a) 13

(b) 3

(c) 73

TEHTÄVÄ 1.37: VASTALUKU JA KÄÄNTEISLUKU

Laske lukujen 3 ja -12

(a) summan vastaluku

(b) vastalukujen erotus

(c) käänteislukujen tulo

(d) osamäärän käänteisluku.

VASTAUS

(a) 9

(b) -15

(c) $-\frac{1}{36}$

(d) $-4.$

TEHTÄVÄ 1.38: VASTALUKU

Keksi esimerkki luvusta a, jolla pätee

(a) $-a < a$

(b) $-a > a$

(c) $-a = a.$

TEHTÄVÄ 1.39: JAKOLASKU JA KERTOLASKU

Jakolasku ja kertolasku liittyvät toisiinsa:

$$\frac{a}{b} = c,$$

jos ja vain jos $a = bc$. Tarkista kertolaskun avulla, ovatko seuraavat jakolaskut oikein:

(a) $\frac{56}{7} = 8$

(b) $\frac{682}{16} = 42$

(c) $\frac{3}{0} = 1$

Onko c-kohdan jakolasku mahdollista korjata oikeaksi vaihtamalla luvun 1 paikalle jokin toinen luku? Selitä omin sanoin.

VASTAUS

(a) oikein

(b) väärin

(c) väärin

TEHTÄVÄ 1.40: RATIONAALILUVUT

Järjestä seuraavat luvut pienimmästä suurimpaan:

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{15}.$$

VASTAUS

$$\frac{4}{15}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}.$$

TEHTÄVÄ 1.41: LUKUALUEET

(a) Keksi jokin kokonaisluku, joka ei ole luonnollinen luku.

(b) Keksi jokin rationaaliluku, joka on myös luonnollinen luku.

(c) Keksi jokin rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku.

(d) Onko mahdollista keksiä sellainen kokonaisluku, joka ei ole rationaaliluku?

TEHTÄVÄ 1.42: KERTOLASKU JA SUPISTAMINEN

Laske seuraavat tulot. Supista ennen kertolaskujen laskemista, niin selviät helpommalla.

(a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}$

(b) $\frac{2}{15} \cdot \frac{3}{16}$

(c) $\frac{10}{9} \cdot \frac{6}{25}$.

VASTAUS

(a) $\frac{2}{7}$

(b) $\frac{1}{40}$

(c) $\frac{4}{15}$

TEHTÄVÄ 1.43: MURTOLUKUJEN KERTOLASKU

Laske, kuinka paljon on

(a) kaksi viidesosaa luvusta $\frac{3}{4}$

(b) kolmasosa luvusta $\frac{5}{7}$

(c) neljä viidestoistaosaa luvusta $\frac{5}{12}$.

Havainnollista a- ja b-kohtien laskuja piirroksilla samaan tapaan kuin tehtävässä 19.

VASTAUS

(a) $\frac{3}{10}$

(b) $\frac{5}{21}$

(c) $\frac{1}{9}$

TEHTÄVÄ 1.44: TULOT JA OSAMÄÄRÄT

Merkitse "viidesosa luvusta a"

(a) osamääränä

(b) tulona.

VASTAUS

(a) $\frac{a}{5}$

(b) $\frac{1}{5}a$

TEHTÄVÄ 1.45: MURTOLUKUJEN JAKOLASKU

Laske

(a) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$

(b) $\frac{3}{10} : \frac{3}{4}$

(c) $\frac{5}{8} : \frac{1}{6}$.

Havainnollista a- ja b-kohtien laskuja piirroksilla samaan tapaan kuin tehtävässä 23.

VASTAUS

(a) $\frac{14}{15}$

(b) $\frac{2}{5}$

(c) $\frac{15}{4}$

TEHTÄVÄ 1.46: MURTOLUKUJEN JAKOLASKU

Muuta kokonaisluku murtolukumuotoon ja laske

(a) $\frac{2}{3} : 10$

(b) $4 : \frac{3}{8}$

(c) $\frac{2}{7} : (-6)$.

VASTAUS

(a) $\frac{1}{15}$

(b) $\frac{32}{3}$

(c) $-\frac{1}{21}$

TEHTÄVÄ 1.47: RATIONAALILUVUN DESIMAALIMUOTO

Kirjoita seuraavat luvut desimaalimuodossa. Jos desimaalikehitelmä on päättymätön, kirjoita lisäksi näkyviin, mikä sen jakso on.

(a) $\frac{9}{10}$

(b) $\frac{5}{11}$

(c) $\frac{7}{12}$

(d) $\frac{2}{7}$.

VASTAUS

(a) $0,9$

(b) $0{,}454545454545\ldots$, jakso 45

(c) $0{,}583333333333\ldots$, jakso 3

(d) $0{,}285714285714\ldots$, jakso 285714

TEHTÄVÄ 1.48: LASKULAIT

Keksi esimerkki, joka osoittaa, että reaalilukujen vähennyslasku ei ole

(a) vaihdannainen

(b) liitännäinen.

TEHTÄVÄSARJA III

TEHTÄVÄ 1.49:

Jussi laskee päässä kertolaskun seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
27 \cdot 31 &= 20 \cdot 30 + 7 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\
&= 600 + 210 + 20 + 7 \\
&= 837.
\end{aligned}
$$

Onko Jussin päättely oikein? Perustele. [Lyhyt K2016/2c]

VASTAUS

Jussi on käyttänyt sääntöä $(10a + b)(10c + d) = 10c \cdot 10a + 10cb + 10ad + bd$, joka on pätevä.

TEHTÄVÄ 1.50:

Alpo, Sanna ja Pauli palaavat samalla taksilla ylioppilasjuhlista. Alpon jäädessä pois mittari näyttää 21,90 €, Sannan jäädessä 28,20 € ja matkan loppusumma on 33,50 €. Matkan hinta päätetään jakaa seuraavalla tavalla: Alpo maksaa kolmasosan matkan alkuosuuden hinnasta. Sanna maksaa kolmasosan alkuosuudesta ja puolet keskiosuuden hinnasta. Laskun loppuosa jää Paulille. Kuinka paljon kukin joutuu maksamaan? [Lyhyt K2013/4]

VASTAUS

Alpo maksaa 7,30 €; Sanna maksaa 10,45 € ja Pauli maksaa 15,75 €.

TEHTÄVÄ 1.51:

Muuta sekaluvut murtolukumuotoon ja laske sen jälkeen:

(a) $2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} : \frac{3}{4}$

(b) $\left(1\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{5} : \frac{14}{15}$

(c) $\left(4\frac{3}{5} - 2\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{4}\right) : \frac{2}{7}.$

VASTAUS

(a) $\frac{13}{18}$

(b) $-\frac{3}{2}$

(c) $\frac{61}{10}$

TEHTÄVÄ 1.52:

Laske

(a) luvun -1 vastaluvun ja luvun 5 käänteisluvun keskiarvo. [Lyhyt S2015/1a]

(b) lukujen $\frac{3}{4}$ ja $\frac{6}{5}$ käänteislukujen keskiarvo. [Lyhyt K2013/1b]

VASTAUS

(a) $\frac{3}{5}$

(b) $\frac{13}{12}$

TEHTÄVÄ 1.53:

Osoita, että luvut

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ja } \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ovat toistensa käänteislukuja. [Pitkä K2016/2b]

IDEA

Laske tutkittavien lukujen tulo. Saatko tulokseksi luvun 1?

TEHTÄVÄ 1.54:

Tarkastellaan muotoa $\frac{m}{n}$ olevia lukuja, kun $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$ ja $n \in \{2, 3, 4\}$. Määritä näistä luvuista suurin ja pienin. [Pitkä S2015/1c]

VASTAUS

Suurin on 1, pienin on $-\frac{1}{2}$.

TEHTÄVÄ 1.55:

Mikä seuraavista on luvun $-a + b$ vastaluku?

(a) $b - a$

(b) $a - b$

(c) $-a - b$

[Pitkä K2016/1d; Lyhyt K2016/3d]

VASTAUS

$a - b$

TEHTÄVÄ 1.56:

Kolme kaverusta lähtee kisamatkalle Tallinnaan ja varaa seitsemäksi yöksi majoituksen, jonka kokonaishinta on 435 euroa. Kuinka paljon kunkin heistä pitää maksaa, jos henkilö A majoittuu kaksi yötä, henkilö B kuusi yötä ja henkilö C kaikki seitsemän yötä?

VASTAUS

A maksaa 58 €, B maksaa 174 € ja C maksaa 203 €.

TEHTÄVÄ 1.57:

Laske lausekkeen $a(b-2)+(a-b)^2-b(1-a)$ arvo, kun $a=2$ ja $b=\,-2$. [Lyhyt S2013/1c]

VASTAUS

6

TEHTÄVÄ 1.58:

Tehtävänä on täydentää alla olevat yhtälöt niin, että ne pitävät paikkansa. Saat käyttää peruslaskutoimituksia eli merkkejä $+$, $-$, $\cdot$ ja $:$ sekä sulkuja.

(a) $2\quad 2\quad 2=6$

(b) $3\quad 3\quad 3=6$

(c) $5\quad 5\quad 5=6$

(d) $6\quad 6\quad 6=6$

(e) $7\quad 7\quad 7=6$.

ITSEARVIOINTITEHTÄVÄT

Varmista, että olet oppinut tämän luvun keskeiset asiat tekemällä itsearviointitesti opetus.tv:n polku-palvelussa. Samalla harjoittelet omien ratkaisujesi pisteyttämistä pisteytysohjeiden avulla.

Potenssi ja logaritmi

LUVUN TAVOITTEET

Tämän luvun tavoitteena on, että hallitset potenssien laskusäännöt ja tiedät, mitä logaritmilla tarkoitetaan. Osaat

- sieventää potenssilausekkeita potenssin määritelmän tai potenssien laskusääntöjen avulla
- ilmaista käänteisluvun käyttäen eksponenttia -1
- kirjoittaa luvun kymmenpotenssimuodossa tiettyjen merkitsevien numeroiden tarkkuudella
- kirjoittaa eksponenttiyhtälön ratkaisun logaritmin avulla
- käyttää potenssin laskusääntöjä eksponenttiyhtälön ratkaisemiseen.

Lisäksi tiedät, että matematiikassa teoreema tarkoittaa tosiasiaa, joka voidaan perustella todeksi määritelmistä lähtien.

POTENSSIN MÄÄRITELMÄ JA POTENSSEILLA LASKEMINEN

Summa, jossa kaikki yhteenlaskettavat ovat samoja, voidaan kirjoittaa tulona. Esimerkiksi

$$7+7+7+7=4\cdot 7$$
$$-2+(-2)+(-2)=3\cdot(-2).$$

Vastaavasti tulo, jossa kaikki tulon tekijät ovat samoja, voidaan kirjoittaa potenssina. Esimerkiksi

$$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7=7^4$$
$$-2\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^3.$$

MÄÄRITELMÄ: POTENSSI

Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Luvun a n*:s potenssi* a^n tarkoittaa tuloa $a\cdot a\cdots a$, jossa luku a esiintyy n kertaa. Siis

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{ kappaletta}}$$

Potenssilausekkeessa a^n luku a on *kantaluku* ja luku n on *eksponentti*.

TEHTÄVÄ 2.1: POTENSSIN MÄÄRITELMÄ

Laske seuraavat tulot ja kirjoita ne potenssimerkinnän avulla.

(a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

(b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

(c) $5 \cdot 5$.

Keksi ainakin kaksi erilaista tapaa, jolla a- ja b-kohtien tulot voidaan laskea ilman laskinta. Selitä omin sanoin, millaisia nämä tavat ovat.

TEHTÄVÄ 2.2: POTENSSIN MÄÄRITELMÄ

Kirjoita seuraavat potenssit tuloina (kertolaskumerkintää käyttäen) ja laske niiden arvo.

(a) 4^5

(b) 3^2

(c) $(-2)^3$.

Jos kantaluku on negatiivinen, tarvitaan potenssimerkinnässä sulut. Esimerkiksi luvun -1 kolmas potenssi on

$$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

ja neljäs potenssi on

$$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

TEHTÄVÄ 2.3: POTENSSIN MÄÄRITELMÄ

Merkitse lauseke näkyviin ja laske sen arvo:

(a) luvun -6 viides potenssi

(b) luvun -10 kuudes potenssi.

TEHTÄVÄ 2.4: POTENSSIN MÄÄRITELMÄ

Palautetaan mieleen, että luvun c vastaluku on aina $-c$. Siis esimerkiksi luvun 3 vastaluku on -3 ja luvun -9 vastaluku on $-(-9) = 9$.

(a) Laske potenssin 7^4 arvo.

(b) Mitä eroa on merkinnöillä $(-7)^4$ ja -7^4? Onko jompi kumpi niistä luvun 7^4 vastaluku?

(c) Päättele lausekkeen $(-7)^4$ arvo a-kohdan tuloksen avulla.

(d) Päättele lausekkeen -7^4 arvo a-kohdan tuloksen avulla.

Jos miinusmerkki on potenssimerkinnän edessä ilman sulkuja, vaikuttaa se koko potenssilausekkeeseen:

$$-a^n = -(a^n).$$

Esimerkiksi merkintä -3^6 tarkoittaa potenssin $3^6 = 729$ vastalukua:

$$-3^6 = -(3^6) = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -729.$$

TEHTÄVÄ 2.5: POTENSSIN MÄÄRITELMÄ

Kirjoita seuraavat tulot potenssimerkinnän avulla:

(a) $x \cdot x \cdot x \cdot x$

(b) $(2x) \cdot (2x) \cdot (2x)$

(c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a.$

Keksi b- ja c-kohdissa kaksi erilaista tapaa, jolla voit kirjoittaa tulot potenssimerkintää käyttäen.

Potenssilausekkeita voidaan sieventää purkamalla ne tulomuotoon potenssin määritelmän mukaisesti, laskemalla kaikki mahdolliset laskut ja kokoamalla tulos jälleen potenssimuotoon. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}(5a^7)^2 &= 5a^7 \cdot 5a^7 \\ &= 25 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{14 \text{ kappaletta}} = 25a^{14}\end{aligned}$$

TEHTÄVÄ 2.6: TULON POTENSSI

Kirjoita seuraavat potenssit tuloina, laske kaikki mahdolliset laskut ja ilmoita tuloksen kirjainosa potenssimerkinnän avulla samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä.

(a) $(6a)^4$

(b) $(2b)^6$

(c) $(7x)^3$

TEHTÄVÄ 2.7: OSAMÄÄRÄN POTENSSI

Kirjoita seuraavat potenssit tuloina, laske kaikki mahdolliset laskut ja ilmoita tuloksen kirjainosa potenssimerkinnän avulla.

(a) $\left(\frac{a}{5}\right)^3$

(b) $\left(-\frac{4}{b}\right)^2$

(c) $\left(\frac{2a}{3}\right)^5$

TEHTÄVÄ 2.8: TULON JA OSAMÄÄRÄN POTENSSI

Kirjoita seuraavat lausekkeet ensin tulomuodossa ja sitten toisella tavalla potenssimerkintää käyttäen samaan tapaan kuin edellisissä tehtävissä:

(a) $(ab)^4$

(b) $(ab)^n$

(c) $\left(\frac{a}{b}\right)^4$

(d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

Potenssilausekkeiden sieventämisessä pääsee aina alkuun, kun muistaa potenssin määritelmän eli sopimuksen siitä, mitä potenssi tarkoittaa. Niin myös seuraavissa tehtävissä.

TEHTÄVÄ 2.9: POTENSSIN POTENSSI

Ilmoita potenssit ensin tulomuodossa määritelmää käyttäen ja lausu lopputulos taas potenssina.

(a) $\left(2^3\right)^2$

(b) $\left(3^4\right)^3$

(c) $\left(4^2\right)^5$

Tutki tehtävän lähtötilannetta ja lopputulosta. Keksitkö säännön eksponentin muodostumiselle potenssin potenssissa?

TEHTÄVÄ 2.10: POTENSSIN POTENSSI

Kirjoita seuraavat lausekkeet potenssimerkintää käyttäen samaan tapaan kuin edellisessä tehtävässä:

(a) $(a^5)^2$

(b) $(a^m)^n$.

Edellä havaittuja potenssien laskusääntöjä voi käyttää myös toiseen suuntaan. Siis

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n$$

Seuraavaksi tutkitaan, mitä eksponenteille tapahtuu, jos kerrotaan tai jaetaan potensseja, joilla on sama kantaluku.

TEHTÄVÄ 2.11: SAMANKANTAISTEN POTENSSIEN TULO

Kirjoita lauseke ensin tulomuodossa. Kirjoita lopputulos sen jälkeen potenssimerkintää käyttäen.

(a) $2^3 \cdot 2^4$

(b) $4^2 \cdot 4^7$

(c) $(-3)^4 \cdot (-3)^6$.

Tutki tehtävän lähtötilannetta ja lopputulosta a-, b- ja c-kohdissa. Keksitkö säännön eksponentin muodostumiselle samankantaisten potenssien tulossa?

TEHTÄVÄ 2.12: SAMANKANTAISTEN POTENSSIEN OSAMÄÄRÄ

Kirjoita osoittaja ja nimittäjä ensin tulomuodossa ja supista. Kirjoita lopputulos sen jälkeen potenssimerkintää käyttäen.

(a) $\frac{2^7}{2^4}$

(b) $\frac{5^6}{5^2}$

(c) $\frac{(-2)^8}{(-2)^7}$.

Tutki tehtävän lähtötilannetta ja lopputulosta a-, b- ja c-kohdissa. Keksitkö säännön eksponentin muodostumiselle samankantaisten potenssien osamäärässä?

TEHTÄVÄ 2.13: SAMANKANTAISTEN POTENSSIEN TULO JA OSAMÄÄRÄ

Kirjoita seuraavat lausekkeet potenssimerkintää käyttäen samaan tapaan kuin edellisissä tehtävissä:

(a) $a^5 a^3$

(b) $a^m a^n$

(c) $\frac{a^5}{a^3}$

(d) $\frac{a^m}{a^n}$

NEGATIIVINEN EKSPONENTTI JA EKSPONENTTI NOLLA

Edellisessä kappaleessa sovittiin, mitä tarkoitetaan potenssilla a^n, missä n on positiivinen kokonaisluku. Sen jälkeen tutkittiin, millaisia laskulakeja potenssilausekkeet noudattavat. Huomattiin esimerkiksi, että samankantaisten potenssien osamäärälle pätee sääntö

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Jos tässä luku m sattuu olemaan pienempi kuin luku n, joudutaan kuitenkin ongelmalliseen tilanteeseen. Esimerkiksi

$$\frac{a^3}{a^9} = a^{3-9} = a^{-6}.$$

Huomataan, että tarvitaan sopimus myös siitä, mitä potenssilla tarkoitetaan tilanteessa, jossa eksponentti on negatiivinen kokonaisluku tai nolla.

MÄÄRITELMÄ: POTENSSI

Oletetaan, että $a \neq 0$ ja n on positiivinen kokonaisluku. Potenssit a^0 ja a^{-n} määritellään seuraavasti:

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potenssin a^0 arvo on siis 1 ja potenssi a^{-n} on potenssin a^n käänteisluku.

TEHTÄVÄ 2.14: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI JA EKSPONENTTI NOLLA

Laske seuraavat potenssit yllä olevaa määritelmää käyttäen:

(a) 4^0

(b) 2^{-3}

(c) $(-3)^{-2}$

(d) 5^{-3}

(e) 7^{-1}

(f) $(-6)^{-1}$

TEHTAVA 2.15: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI JA EKSPONENTTI NOLLA

Kirjoita seuraavat lausekkeet potenssimuodossa:

(a) $\frac{1}{10^2}$

(b) $\frac{1}{a^3}$

(c) $\frac{1}{b^{15}}$

(d) $\frac{1}{16}$

(e) $\frac{1}{8}$

Keksi ainakin kaksi erilaista tapaa ilmaista d- ja e-kohtien lausekkeet potenssimuodossa.

Edellä esitetystä potenssin määritelmästä seuraa erityisesti, että

$$a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}.$$

Potenssi a^{-1} on siis luvun a käänteisluku.

TEHTÄVÄ 2.16: EKSPONENTTI -1

Sievennä seuraavat potenssit määrittämällä suluissa olevien lukujen käänteisluvut:

(a) 4^{-1}

(b) $(-15)^{-1}$

(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

(d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}$

(e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

TEHTÄVÄ 2.17: POTENSSIN POTENSSI

Ilmoita potenssit ensin tulomuodossa määritelmää käyttäen ja lausu lopputulos taas potenssina.

(a) $\left(2^{-3}\right)^2$

(b) $\left(4^2\right)^{-5}$

(c) $\left(3^{-4}\right)^{-3}$

Tutki tehtävän lähtötilannetta ja lopputulosta. Vaikuttaako potenssin potenssin laskusääntö toimivan myös negatiivisten eksponenttien tapauksessa?

TEHTÄVÄ 2.18: SAMANKANTAISTEN POTENSSIEN TULO

Kirjoita lauseke ensin tulomuodossa. Kirjoita lopputulos sen jälkeen potenssimerkintää käyttäen.

(a) $2^{-3} \cdot 2^{5}$

(b) $4^{2} \cdot 4^{-7}$

(c) $(-3)^{-4} \cdot (-3)^{-6}$.

(d) $9^{-8} \cdot 9^{8}$

Tutki tehtävän lähtötilannetta ja lopputulosta a-, b-, c- ja d-kohdissa. Vaikuttaako samankantaisten potenssien tulon laskusääntö pätevän myös negatiivisten eksponenttien tapauksessa?

Kun potenssi määriteltiin negatiivisten eksponenttien ja eksponentin nolla tapauksessa, tehtiin määritelmästä tarkoituksella sellainen, että aikaisemmin havaitut potenssien laskusäännöt toimivat edelleen. Nämä laskusäännöt on koottu seuraavaan teoreemaan. Teoreemat (toiselta nimeltään lauseet) ovat matemaattisia tosiasioita, jotka voidaan perustella todeksi määritelmien pohjalta. Tällä kertaa perustelu kuitenkin sivuutetaan, koska se ei ole tämän kurssin kannalta oleellinen.

TEOREEMA 1

Seuraavat potenssien laskusäännöt pätevät kaikilla kokonaisluvuilla m ja n sekä kaikilla nollasta poikkeavilla reaaliluvuilla a ja b:

1. tulon potenssi on potenssien tulo:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

2. osamäärän potenssi on potenssien osamäärä:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

3. potenssin potenssissa eksponentit kerrotaan keskenään:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

4. samankantaisten potenssien tulossa eksponentit lasketaan yhteen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

5. samankantaisten potenssien osamäärässä osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Seuraavassa tehtävässä jatketaan negatiivisten eksponenttien ominaisuuksien tutkimista.

TEHTÄVÄ 2.19: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI

Tehtävänä on tutkia, miten potenssit 2^{-4} ja $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ liittyvät toisiinsa.

(a) Kirjoita näkyviin, mitä 2^{-4} tarkoittaa määritelmän mukaan.

(b) Kirjoita $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ tulomuodossa ja sievennä mahdollisimman pitkälle.

(c) Vertaa a- ja b-kohdan tuloksia. Miten ne liittyvät toisiinsa?

(d) Millainen yleinen sääntö saattaisi liittää toisiinsa lausekkeet a^{-n} ja $\left(\frac{1}{a}\right)^n$?

Edellisen tehtävän havaintojen pohjalta voidaan päätyä seuraavaan teoreemaan. Tällä kertaa myös teoreeman perustelu (eli todistus) on kirjoitettu näkyviin. Lue se huolellisesti ja mieti jokaisen virkkeen jälkeen, mitä järkeä selityksessä on. Jos jokin kohta tuntuu hämärältä, keskustele siitä kaverin tai opettajan kanssa.

TEOREEMA 2

Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku ja $a \neq 0$. Potenssi a^{-n} on luvun a käänteisluvun n:s potenssi eli

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Perustelu: Potenssin määritelmän mukaan

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Toisaalta potenssin määritelmän mukaan

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)\cdots\left(\frac{1}{a}\right)}_{n\text{ kpl}} = \frac{1}{a^n}.$$

Siis

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan äsken perustellun teoreeman 2 soveltamista.

TEHTÄVÄ 2.20: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI

Tehtävänä on määrittää potenssi $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$.

(a) Muodosta luvun $\frac{4}{5}$ käänteisluku. Muista, että luvun ja sen käänteisluvun tulo on aina 1.

(b) Laske a-kohdassa muodostamasi luvun kolmas potenssi.

(c) Miten ratkaisun vaiheet liittyvät teoreemaan 2? Selitä omin sanoin.

TEHTAVA 2.21: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI

Laske seuraavat potenssit ja anna vastaukset murtolukuina:

(a) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$

(b) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}$

(c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$.

KYMMENPOTENSSIMUOTO JA MERKITSEVÄT NUMEROT

Kymmenpotenssimuotoa käytetään usein hyvin suurten tai pienten positiivisten lukujen merkisemiseen. Esimerkiksi Suomen väkiluku oli heinäkuussa 2016 noin $5{,}497$ miljoonaa eli $5{,}497 \cdot 10^6 = 5\,497\,000$. Yhden vesimolekyylin massa puolestaan on noin $2{,}9915 \cdot 10^{-23}$ grammaa.

MÄÄRITELMÄ: KYMMENPOTENSSIMUOTO

Positiivisen luvun *kymmenpotenssimuoto* tarkoittaa luvun esittämistä muodossa $a \cdot 10^n$, missä n on kokonaisluku ja kerroin a on vähintään yksi ja pienempi kuin kymmenen: $1 \leq a < 10$.

TEHTÄVÄ 2.22: KYMMENEN POTENSSIT

Ilmaise seuraavat luvut muodossa 10^n, missä n on kokonaisluku:

(a) 100

(b) $1\,000$

(c) $100\,000$

(d) $1\,000\,000$.

Vertaa eksponenttia n ja alkuperäisen luvun nollien lukumäärää. Mitä havaitset?

TEHTÄVÄ 2.23: KYMMENNEN POTENSSIT

Ilmaise seuraavat luvut muodossa 10^n, missä n on kokonaisluku:

(a) $0,1$

(b) $0{,}001$

(c) $0{,}00001$.

Vertaa eksponenttia n ja alkuperäisen luvun desimaalipilkun jälkeisten numeroiden määrää. Mitä havaitset?

TEHTÄVÄ 2.24: KYMMENPOTENSSIMUOTO

Ilmaise seuraavat etäisyydet kymmenpotenssimuodossa:

(a) Kuun keskimääräinen etäisyys Maasta $384\,400$ km

(b) Maan keskimääräinen etäisyys Auringosta $150\,000\,000$ km

(c) Saturnuksen keskimääräinen etäisyys Auringosta $1\,427\,000\,000$ km.

Edellisessä tehtävässä ilmaistiin erilaisia etäisyyksiä kymmenpotenssimuodossa. Kaikki niistä olivat jonkinlaisia likiarvoja. Mistä tietää, millä tarkkuudella nämä etäisyydet oli tehtävässä ilmoitettu?

Ilmoitettujen mittaustulosten tarkkuutta voi arvioida siitä, kuinka monta *merkitsevää numeroa* niissä on. Desimaalimuodossa ilmoitettussa luvussa merkitseviä ovat kaikki muut numerot paitsi luvun vasemmalla puolella olevat nollat. Esimerkiksi luvussa

$$0{,}00000\color{red}{508}$$

on kolme merkitsevää numeroa ja luvussa

$$\color{red}{23{,}00046000}$$

on kymmenen merkitsevää numeroa. Kokonaislukuna ilmoitetussa luvussa merkitseviä ovat kaikki muut numerot paitsi luvun lopussa olevat nollat. Esimerkiksi luvussa

$$\color{red}{31}0\,000$$

on kaksi merkitsevää numeroa.

TEHTÄVÄ 2.25: MERKITSEVÄT NUMEROT

Kuinka monen merkitsevän numeron tarkkuudella seuraavat etäisyydet on ilmoitettu? Muuttuiko tarkkuus, kun muutit etäisyydet kymmenpotenssimuotoon edellisessä tehtävässä?

(a) Kuun keskimääräinen etäisyys Maasta $384\,400$ km

(b) Maan keskimääräinen etäisyys Auringosta $150\,000\,000$ km

(c) Saturnuksen keskimääräinen etäisyys Auringosta $1\,427\,000\,000$ km.

TEHTÄVÄ 2.26: KYMMENPOTENSSIMUOTO

Ilmaise seuraavat aikuisille suositellut vuorokausiannokset kymmenpotenssimuodossa. Kuinka monta merkitsevää numeroa niissä on?

(a) C-vitamiini $0{,}075$ grammaa

(b) B_{12}-vitamiini $0{,}0000024$ grammaa.

LOGARITMI JA EKSPONENTIN RATKAISEMINEN

Potenssin määritelmän mukaan $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Jossain tilanteissa halutaan tarkastella erityisesti potenssilausekkeessa esiintyvää eksponenttia, joka on tässä tapauksessa 3. Jos kantaluku (tässä tapauksessa 2) ja potenssiin korotuksen tulos (tässä tapauksessa 8) tiedetään, voidaan eksponentista puhua logaritmin avulla. Tässä tilanteessa voidaan sanoa, että

$$\log_2(8) = 3$$

eli luvun kahdeksan 2-kantainen logaritmi on 3. Logaritmi kertoo siis eksponentin arvon.

TEHTÄVÄ 2.27: EKSPONENTIN ARVO

Päättele tai selvitä kokeilemalla, mikä eksponentin pitää olla, jotta yhtälö toteutuu:

(a) $7^x = 49$

(b) $2^x = 32$

(c) $3^x = 27$.

MÄÄRITELMÄ: LOGARITMI

Oletetaan, että kantaluku k on positiivinen ja $k \neq 1$. Positiivisen luvun a k-*kantainen logaritmi* tarkoittaa lukua x, jolla on ominaisuus $k^x = a$. Luvusta x käytetään merkintää $\log_k(a)$.

Edellisessä tehtävässä selvitit siis logaritmit $\log_7(49)$, $\log_2(32)$ ja $\log_3(27)$.

TEHTÄVÄ 2.28: LOGARITMI

Päättele seuraavien logaritmien arvot ratkaisemalla niitä vastaavat eksponenttiyhtälöt esimerkiksi kokeilemalla:

(a) $\log_2(16) = x$, missä luku x toteuttaa yhtälön $2^x = 16$

(b) $\log_5(25) = x$, missä luku x toteuttaa yhtälön $5^x = 25$

(c) $\log_{10}(0,1) = x$, missä luku x toteuttaa yhtälön $10^x = 0,1$.

TEHTÄVÄ 2.29: LOGARITMI

Päättele seuraavien logaritmien arvot muodostamalla ja ratkaisemalla niitä vastaavat eksponenttiyhtälöt samaan tapaan kuin edellisessä tehtävässä.

(a) $\log_3(9)$

(b) $\log_{10}(1\,000\,000)$

(c) $\log_7(1)$.

Logaritmin avulla voidaan ilmaista sellaisiakin eksponentteja, jotka eivät ole kokonaislukuja. Esimerkiksi yhtälön $2^x = 10$ ratkaisu ei ole kokonaisluku, sillä $2^3 = 8 < 10$ ja $2^4 = 16 > 10$. Näistä tietoista voidaan päätellä, että luku x on kolmea suurempi ja neljää pienempi eli $3 < x < 4$. Logaritmin määritelmän mukaan voidaan merkitä $x = \log_2(10)$. Laskimen tai tietokokeen avulla saadaan likiarvo $\log_2(10) \approx 3,32$.

TEHTÄVÄ 2.30: EKSPONENTTIYHTÄLÖN RATKAISU

Kirjoita seuraavien eksponenttiyhtälöiden ratkaisut logaritmin avulla ja selvitä ratkaisujen likiarvot laskimella tai tietokoneella. Anna vastaus viiden merkitsevän numeron tarkkuudella.

(a) $2^x = 100$

(b) $10^x = 2016$

(c) $3^x = 798$.

Jos eksponenttiyhtälön molemmat puolet onnistutaan ilmaisemaan saman kantaluvun potensseina, onnistuu yhtälön ratkaiseminen potenssin laskusääntöjen avulla ilman logaritmia. Esimerkiksi yhtälö

$$5^x = 25^3$$

voidaan muuttaa muotoon

$$5^x = (5^2)^3,$$

sillä $25 = 5^2$. Sen jälkeen yhtälön oikea puoli voidaan sieventää:

$$5^x = 5^6.$$

Tästä voidaan päätellä, että yhtälön ratkaisu on $x = 6$.

TEHTAVA 2.31: EKSPONENTTIYHTALON RATKAISU

Ratkaise seuraavat eksponenttiyhtälöt ilman logaritmia:

(a) $3^x = 9^5$

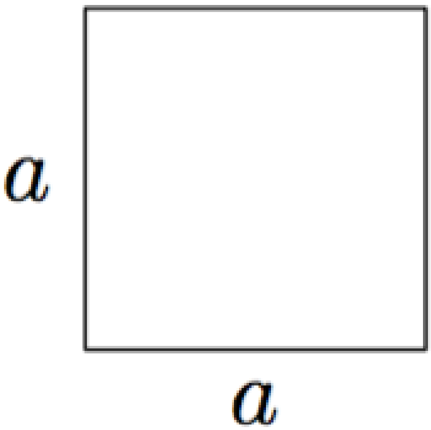
(b) $2^x = 16^7$

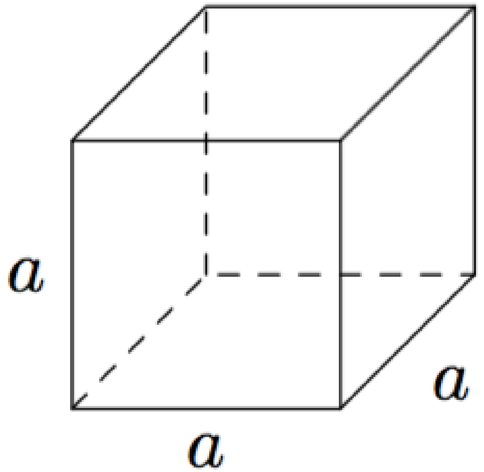
(c) $4^{3x} = 64^8$.

TEHTÄVÄSARJA II

TEHTÄVÄ 2.32: POTENSSI

Luvun a toista potenssia a^2 sanotaan luvun a *neliöksi* ja luvun a kolmatta potenssia a^3 sanotaan luvun a *kuutioksi.* Mistä nämä nimitykset ovat tulleet? Selitä omin sanoin.





Merkitse lausekkeena ja laske

(a) luvun 5 neliö

(b) luvun 5 neliön vastaluku

(c) luvun -5 neliö

(d) luvun -5 kuutio

(e) luvun 5 kuutio

(f) luvun 5 kuution vastaluku.

Mitkä lausekkeista ovat yhtä suuria? Kirjoita havaintosi näkyviin käyttäen luvun 5 tilalla kirjainta a. Onko havainnoissasi kysymyksessä sattuma vai yleispätevä sääntö?

VASTAUS

(a) $5^2 = 25$

(b) $-5^2 = -25$

(c) $(-5)^2 = 25$

(d) $(-5)^3 = -125$

(e) $5^3 = 125$

(f) $-5^3 = -125$

TEHTÄVÄ 2.33: POTENSSI

Laske seuraavien lausekkeiden arvo:

(a) $(7-4)^2$

(b) $7^2 - 4^2$

(c) $7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 + 4^2$

(d) $(7+4)(7-4)$

Mitkä lausekkeista ovat yhtä suuria? Kirjoita havaintosi näkyviin käyttäen luvun 7 tilalla kirjainta a ja luvun 4 tilalla kirjainta b. Onko havainnoissasi kysymyksessä sattuma vai yleispätevä sääntö?

VASTAUS

(a) 9

(b) 33

(c) 9

(d) 33

TEHTÄVÄ 2.34: POTENSSI

Hyvin hajamielinen henkilö päätti aloittaa säästämisen vuonna 1970. Hän talletti kyseisen vuoden alussa 100 markkaa pankkitilille, jonka korko oli 2,5 % vuodessa, mutta unohti sitten koko asian. Kuinka suureksi talletus oli kasvanut

(a) vuoden 1971 alkuun mennessä?

(b) vuoden 1972 alkuun mennessä?

(c) vuoden 2002 alkuun mennessä, jolloin euro otettiin käyttöön? Anna vastaus sekä markkoina että euroina (5,94573 markkaa vastasi yhtä euroa)

(d) vuoden 2016 alkuun mennessä?

Oletetaan, että korkoprosentti pysyi koko ajan samana eli talletus $1{,}025$-kertaistui joka vuosi.

VASTAUS

(a) $102,50$ markkaa

(b) $105,06$ markkaa

(c) $220,38$ markkaa eli $37,07$ euroa

(d) $52,37$ euroa.

TEHTÄVÄ 2.35: POTENSSI

Edellisen tehtävän henkilön hajamielisyys johtui siitä, että hän oli hyvin kiinnostunut menneistä ajoista. Samaan aikaan kun hän päätti aloittaa säästämisen, hän ryhtyi tutkimaan esivanhempiaan. Piirrä kaavio, joka havainnollistaa hyvin hajamielisen henkilön vanhempia ja heidän vanhempiaan ja heidän vanhempiaan. Kuinka monta esivanhempaa tällä henkilöllä on, jos mennään taaksepäin

(a) kaksi sukupolvea

(b) kolme sukupolvea

(c) kuusi sukupolvea

(d) 20 sukupolvea?

Ilmaise vastaukset potenssimerkinnän avulla.

VASTAUS

(a) $4 = 2^2$

(b) $8 = 2^3$

(c) 2^6

(d) 2^{20}

TEHTÄVÄ 2.36: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI JA EKSPONENTTI NOLLA

Palauta mieleesi negatiivisen eksponentin määritelmä ja eksponentin nolla määritelmä. Laske sen jälkeen

(a) $4^{-1} - 2^{-3} + 2^{-1}$

(b) $(-1)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

(c) $(-2)^3 + (-3)^0$

(d) $(-3)^2 - 2^0$.

VASTAUS

(a) $\frac{5}{8}$

(b) 3

(c) -7

(d) 8

TEHTÄVÄ 2.37: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI JA EKSPONENTTI NOLLA

(a) Laske $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$.

(b) Kirjoita luku $506,9$ kymmenen potenssien summana samaan tapaan kuin a-kohdassa.

(c) Keksitkö syyn, miksi käyttämäämme lukujärjestelmää sanotaan kymmenjärjestelmäksi?

(d) Tiedätkö muita esimerkiksi tietokoneiden käyttämiä lukujärjestelmiä?

VASTAUS

(a) $3074{,}105$

(b) $5 \cdot 10^{2} + 6 \cdot 10^{0} + 9 \cdot 10^{-1}$

TEHTÄVÄ 2.38: NEGATIIVINEN EKSPONENTTI

Kaksi opiskelijaa yritti keksiä lausekkeita, jotka tarkoittavat samaa kuin lauseke

$$\frac{1}{5x^{7}}.$$

Opiskelijat saivat ehdottaa sopivaa lauseketta vuorotellen. Heidän ehdotuksensa olivat seuraavat:

A: $5x^{-7}$

B: $(5x)^{-7}$

A: $\frac{x^{-7}}{5}$

B: $5^{-1}x^{-7}$

A: $(5x^{7})^{-1}$

B: $\frac{1}{5}x^{-7}$

Kumpi opiskelija vastasi ensimmäisenä oikein? Kummalla opiskelijalla oli yhteensä enemmän oikeita vastauksia? Mitkä vastauksista olivat oikein?

VASTAUS

Opiskelija A vastasi ensimmäisenä oikein. Oikeita vastauksia kummallakin yhtä monta.

TEHTÄVÄ 2.39: SAMANKANTAISET POTENSSIT

Sievennä seuraavat lausekkeet:

(a) $3^{5} \cdot 3^{10} \cdot 3^{25}$

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

(c) $(-1)^{500} \cdot (-1)^{2015}$

VASTAUS

(a) 3^{40}

(b) $\frac{3}{2}$

(c) -1

TEHTAVA 2.40: SAMANKANTAISET POTENSSIT

Sievennä seuraavat lausekkeet:

(a) $\dfrac{9^{216}}{9^{209}}$

(b) $\dfrac{101^{96}}{101^{100}}$

(c) $\dfrac{(-2)^{97}}{(-2)^{62}}$.

VASTAUS

(a) 9^7

(b) 101^{-4}

(c) $(-2)^{35} = -2^{35}$

TEHTÄVÄ 2.41: POTENSSIN POTENSSI JA SAMANKANTAISET POTENSSIT

Ilmaise luvun 2 potenssina:

(a) 16

(b) $2 \cdot 8^5$

(c) $8^9 \cdot 16^7$

(d) $\dfrac{32^{10}}{2^{25}}$

(e) $\dfrac{16^{100}}{8^{70}}$.

VASTAUS

(a) 2^4

(b) 2^{16}

(c) 2^{55}

(d) 2^{25}

(e) 2^{190}

TEHTÄVÄ 2.42: POTENSSIEN TULO, OSAMÄÄRÄ JA POTENSSIN POTENSSI

Laske:

(a) $40^9 \cdot 0,25^9$

(b) $\dfrac{8888888^2}{2222222^2}$

(c) $\frac{36^{801}}{6^{1600}}$

VASTAUS

(a) $1\,000\,000\,000$

(b) 16

(c) 36

TEHTÄVÄ 2.43: POTENSSIEN LASKUSÄÄNNÖT

Harjoittele potenssien laskusääntöjä tämän pelin avulla. Saat käyttää kynää ja paperia apuna. Pelin tavoitteena on saada kymmenen oikeaa vastausta peräkkäin.

TEHTÄVÄ 2.44: POTENSSIEN LASKUSÄÄNNÖT

Sievennä:

(a) $(-4x^5)^2$

(b) $\frac{21x^{21}}{7x^7}$

(c) $-3x(-3x^6)^2$

VASTAUS

(a) $16x^{10}$

(b) $3x^{14}$

(c) $-27x^{13}$

TEHTÄVÄ 2.45: POTENSSIEN LASKUSÄÄNNÖT

Selitä omin sanoin, mitä eroa a- ja b-kohtien lausekkeilla on. Sievennä ne sen jälkeen.

(a) $(5a)^3(-5a^3)$

(b) $(5a)^3 - 5a^3$

VASTAUS

(a) tulo $-625a^6$

(b) erotus $120a^3$

TEHTÄVÄ 2.46: POTENSSIEN LASKUSÄÄNNÖT

Sievennä:

(a) $ab(a^2b)^3$

(b) $\frac{(xy)^7}{xy^7}$

(c) $\frac{(-a^3b^2)^9}{a(b^4)^7}$

VASTAUS

(a) a^7b^4

(b) x^6

(c) $\frac{-a^{27}}{b^{10}}$

TEHTÄVÄ 2.47: EKSPONENTTIYHTÄLÖ

Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?

(a) $2^x = 2$

(b) $2^x = \frac{1}{2}$

(c) $2^x = 8^2$

(d) $3^x = \frac{1}{3^5}$

(e) $10^x = 1000$

(f) $10^x = 0,01$

[Lyhyt S2014/2]

VASTAUS

(a) $x = 1$

(b) $x = -1$

(c) $x = 6$

(d) $x = -5$

(e) $x = 3$

(f) $x = -2$

TEHTÄVÄ 2.48: KYMMENPOTENSSIMUOTO JA MERKITSEVÄT NUMEROT

Ilmaise seuraavat luonnonvakiot kymmenpotenssimuodossa neljän merkitsevän numeron tarkkuudella:

(a) valon nopeus tyhjiössä 299792458 m/s

(b) Stefan-Boltzmannin vakio 0,000000005670367 W/(m^2K^4)

(c) ihannekaasun moolitilavuus normaalitilassa 0,022414 m^3

(d) Rydbergin vakio 10973731 m^{-1}.

VASTAUS

(a) $2{,}998 \cdot 10^8$ m/s

(b) $5{,}670 \cdot 10^{-9}$ $W/(m^2K^4)$

(c) $2{,}241 \cdot 10^{-2}$ m^3

(d) $1{,}097 \cdot 10^7$ m^{-1}

TEHTÄVÄ 2.49: KYMMENPOTENSSIMUOTO

Luonnontieteissä ja tekniikassa käytetään positiivisille luvuille usein esitysmuotoa $a \cdot 10^n$, jossa eksponentti n on jaollinen luvulla 3. Kopioi alla oleva taulukko vihkoosi ja täydennä siihen näihin esitysmuotoihin liittyvät etuliitteet ja lyhenteet. Etsi tarvittavat tiedot esimerkiksi netistä.

10^{12}	tera-	
10^9		G
10^6		
10^3		
10^{-3}		
10^{-6}		
10^{-9}		
10^{-12}	piko-	

Ilmaise sopivan lyhenteen avulla

(a) keltaisen valon aallonpituus noin 0,00000058 m

(b) Katri Valan lämpöpumppulaitoksen lämmitysteho noin 90000000 W.

VASTAUS

(a) 580 nm

(b) 90 MW

TEHTÄVÄ 2.50: LOGARITMI

Päättele seuraavien logaritmien arvot ratkaisemalla niitä vastaavat eksponenttiyhtälöt esimerkiksi kokeilemalla:

(a) $\log_4(64)$

(b) $\log_3(81)$

(c) $\log_5(0,04)$.

VASTAUS

(a) 3

(b) 4

(c) -2

TEHTÄVÄ 2.51: LOGARITMI

Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?

(a) $\log_2(x) = 5$

(b) $\log_2(x) = 1$

(c) $\log_{10}(x) = 3$

(d) $\log_{10}(x) = 1$

VASTAUS

(a) 32

(b) 2

(c) 1000

(d) 10

TEHTÄVÄ 2.52: EKSPONENTTIYHTÄLÖN RATKAISU

Kirjoita seuraavien eksponenttiyhtälöiden ratkaisut logaritmin avulla ja selvitä ratkaisujen likiarvot laskimella tai tietokoneella. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

(a) $3^x = 2$

(b) $6 \cdot 5^x = 120$

(c) $2 \cdot 10^x = 1234567890$.

VASTAUS

(a) $\log_3(2)$

(b) $\log_5(20)$

(c) $\log_{10}(617283945)$

TEHTÄVÄ 2.53: EKSPONENTTIYHTÄLÖN RATKAISU

Ratkaise yhtälö $2 \cdot 3^x = 162$ [Lyhyt K2014/2c]

VASTAUS

$x = 4$

TEHTÄVÄSARJA III

TEHTÄVÄ 2.54:

Saat sähköpostin, jossa huijari lupaa kaksinkertaistaa sijoituksesi vuodessa, jos sijoitat vähintään 2500 euroa. Kuinka monen vuoden kuluttua tämä minimisijoitus olisi kasvanut yli miljoonan euron arvoiseksi?

Kirjoita näkyviin ratkaisussa käyttämäsi lausekkeet tai yhtälöt ja selitä lisäksi omin sanoin, miten päättelit.

VASTAUS

Yhdeksän vuoden kuluttua.

TEHTÄVÄ 2.55:

Bakteeriviljelmän massa on nyt 5 mg ja massa kaksinkertaistuu aina kolmessa tunnissa. Kuinka pitkän ajan kuluttua viljelmän massa on

(a) 640 mg

(b) yli 50 grammaa?

Kirjoita näkyviin ratkaisussa käyttämäsi lausekkeet tai yhtälöt ja selitä lisäksi omin sanoin, miten päättelit. Anna vastaukset tunnin tarkkuudella.

VASTAUS

(a) 21 tunnin kuluttua

(b) 40 tunnin kuluttua (39 h 52 min)

TEHTÄVÄ 2.56:

Sievennä seuraavat lausekkeet. Muista potenssin määritelmä ja kertaa tarvittaessa potenssin laskusäännöt.

(a) $a^n a^n$

(b) $\dfrac{a^{3n}}{a^3}$

(c) $\dfrac{b^{2n+1}}{b^n b^n}$

(d) $\dfrac{x^n x^n}{x^n + x^n}$

VASTAUS

(a) a^{2n}

(b) $a^{3(n-1)}$

(c) b

(d) $\frac{x^n}{2}$

TEHTÄVÄ 2.57:

Laske lausekkeen $\frac{2^n 4^{n+5}}{8^{n+1}}$ arvo, jos

(a) $n = 1$

(b) $n = 5$.

(c) Mitä voisi epäillä edellisten kohtien perusteella? Osoita potenssien laskusääntöjen avulla, ettei kysymyksessä ollut sattuma.

VASTAUS

(a) 2^7

(b) 2^7

TEHTÄVÄ 2.58:

Laske potenssit 10^3, 10^6 ja 10^9. Kuinka monta numeroa niissä on?

Ilmaise seuraavat luvut kymmenpotenssimuodossa kuuden numeron tarkkuudella. Kuinka monta numeroa näissä luvuissa on, jos ne kirjoitettaisiin näkyviin ilman kymmenpotenssimuotoa? Hyödynnä tehtävän alkuosan havaintojasi.

(a) 6^{10}

(b) 2^{55}

(c) 3^{42}

VASTAUS

(a) $6{,}04662 \cdot 10^7$, kahdeksan numeroa

(b) $3{,}60288 \cdot 10^{16}$, 17 numeroa

(c) $1{,}09419 \cdot 10^{20}$, 21 numeroa

TEHTÄVÄ 2.59:

Alla on ote Wikipedian CRP:tä koskevasta tiedosta. Vastaa sen perusteella seuraaviin kysymyksiin.

(a) Potilaan CRP-pitoisuus oli 40 klo 12:00. Kuinka suuri pitoisuus voi enintään olla klo 18:00?

(b) Potilaan CRP-pitoisuus oli 100 maanantaina klo 12:00. Milloin se voi aikaisintaan laskea arvoon 10?

CRP:n pitoisuus veressä nousee bakteeri-infektioiden, muiden tulehdustilojen ja kudosvaurion yhteydessä nopeasti, jo muutaman tunnin kuluessa, ja pitoisuus voi kaksinkertaistua kahdeksan tunnin välein jopa 1000-kertaiseksi viitealueeseen verrattuna. Maksimitaso saavutetaan tyypillisesti noin 50 tunnissa. CRP nousee yleensä enemmän bakteerin aiheuttamissa tulehduksissa kuin virustulehduksissa, mutta kohonnut CRP ei ole minkään tietyn tulehdustilan merkki. Lievät tulehdukset ja virusinfektiot nostavat CRP:n tyypillisesti noin tasolle 10–50 mg/l, aktiiviset tulehdukset ja bakteeri-infektiot pitoisuuksiin 50–200 mg/l ja vakavat infektiot tai traumat tasolle >200 mg/l. CRP:n biologinen puoliintumisaika on 19 tuntia, joten tulehduksen rauhoituttua CRP-taso laskee nopeasti. CRP on siis herkkä, mutta epäspesifinen tulehdustilan indeksi.

[Lyhyt K2016/8]

VASTAUS

(a) $40 \cdot 2^{6/8} \approx 67,3$

(b) torstaina klo 03:00.

TEHTÄVÄ 2.60:

Vieraalla planeetalla putoavan kappaleen kulkema matka s on suoraan verrannollinen kuluneen ajan t toiseen potenssiin kaavan $s = 10t^2$ mukaisesti.

(a) Kopioi oheinen taulukko vastauspaperiisi ja täydennä tyhjät kohdat.

(b) Merkitse koordinaatistoon a-kohdan taulukosta pisteet, joiden koordinaatit ovat $(\lg t, \lg s)$. Mitä havaitset? Selitä.

t	$\lg t$	$\lg s$
1	0	1
2		
4		
10		
100		

[Lyhyt K2016/12]

Vihje: merkintä $\lg$ tarkoittaa kymmenkantaista logaritmia $\log_{10}$.

VASTAUS

(a)

t	$\lg t$	$\lg s$
1	0	1
2	$0,30\ldots$	$1,6\ldots$

4	$0,60\ldots$	$2,2\ldots$
10	1	3
100	2	5

TEHTÄVÄ 2.61:

Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

$$1,44M = \log_{10}E - 5,24,$$

jossa E on järistyksessä vapautuva energia.

(a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järistyksen voimakkuus oli $9,0$. Laske järistyksessä vapautunut energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

(b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järistyksen voimakkuus oli $6,8$. Kuinka moninkertainen oli Sendain järistyksessä vapautunut energia Koben järistykseen verrattuna?

[Lyhyt K2012/10]

VASTAUS

(a) $E \approx 1,6 \cdot 10^{18}$

(b) noin 1500-kertainen

TEHTÄVÄ 2.62:

Summa, jossa kaikki yhteenlaskettavat ovat samoja, voidaan kirjoittaa tulona, kuten tämän luvun alussa todettiin. Siis esimerkiksi $5+5+5=3\cdot 5$ ja $8+8=2\cdot 8$. Kokoamalla kaikki taulukkoon tällaiset tulot, joissa kumpikin tulon tekijä on enintään 10, saadaan muodostettua tuttu kertotaulu. Alla olevaan taulukkoon on täydennetty kertotaulun viisi ensimmäistä riviä.

$\cdot$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Tulo, jossa kaikki tulon tekijät ovat samoja, voidaan vastaavasti kirjoittaa potenssina. Potenssien arvoista on siis mahdollista muodostaa vastaava "potenssitaulu".

				16	

(a) Kopioi yllä oleva potenssitaulu vihkoosi ja täydennä siihen potenssien arvot.

(b) Vertaa kertotaulua ja potenssitaulua keskenään. Näkyykö siellä samoja lukuja? Missä kohdissa?

ITSEARVIOINTITEHTÄVÄT

Varmista, että olet oppinut tämän luvun keskeiset asiat tekemällä itsearviointitesti opetus.tv:n polku-palvelussa. Samalla harjoittelet omien ratkaisujesi pisteyttämistä pisteytysohjeiden avulla.

Lukujonot ja summat

LUVUN TAVOITTEET

Tämän luvun tavoitteena on, että tunnet lukujonon käsitteen ja osaat mallintaa erilaisia käytännön tilanteita aritmeettisen ja geometrisen lukujonon ja summan avulla. Osaat

- määrittää analyyttisesti tai rekursiivisesti määritellyn lukujonon jäseniä ja tutkia, onko jokin luku annetun lukujonon jäsen
- käyttää laskinta lukujonojen tutkimiseen

- tunnistaa aritmeettisen ja geometrisen lukujonon
- muodostaa lausekkeen sekä aritmeettisen että geometrisen lukujonon yleiselle jäsenelle
- laskea aritmeettisen ja geometrisen summan.

LUKUJONO

Lukujono tarkoittaa nimensä mukaisesti lukujen muodostamaa, yleensä päättymätöntä jonoa. Esimerkiksi 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 9, … on eräs lukujono. Tästä jonosta on vaikea sanoa, miten se jatkuu. Yleensä lukujonoon liittyy jokin sääntö, jonka avulla voidaan päätellä, mitkä ovat jonon seuraavat luvut.

Lukujonon lukuja sanotaan jonon *termeiksi* tai *jäseniksi*. Voidaan esimerkiksi sanoa, että edellä mainitun lukujonon ensimmäinen jäsen on 3 tai että sen kuudes termi on 9.

TEHTÄVÄ 3.1: LUKUJONO

Päättele, miten lukujonot jatkuvat. Selitä, miten ajattelit.

(a) $1, 2, 3, \ldots$

(b) $1, -2, 3, \ldots$

(c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Joskus lukujonosta on helpompi puhua, jos sille annetaan nimi. Voidaan esimerkiksi puhua lukujonosta (a_n) tai lukujonosta (b_n) tai lukujonosta (x_n). Tässä merkinnässä sulut kertovat sen, että puhutaan koko lukujonosta eikä yksittäisestä jonon jäsenestä.

Kun lukujono on nimetty esimerkiksi jonoksi (a_n), tarkoittaa merkintä a_1 sen ensimmäistä jäsentä, a_2 sen toista jäsentä, a_3 sen kolmatta jäsentä ja niin edelleen. Jos halutaan esimerkiksi puhua jonon (a_n) sadannesta jäsenestä, voidaan käyttää merkintää a_{100}. Alaindeksi siis kertoo, kuinka mones jonon jäsen on kysymyksessä.

TEHTÄVÄ 3.2: LUKUJONO

Tarkastele lukujonoa, joka alkaa $1, 1, 2, 3, 5, 8$. Keksi sääntö, jolla tämän lukujonon jäsenet saadaan laskettua kahdesta edellisestä jäsenestä. Määritä sen jälkeen

(a) a_5

(b) a_7

(c) a_9.

TEHTAVA 3.3: LUKUJONO

Päättele, mitä ovat a_8 ja a_{23}, jos lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat

(a) $1,2,3$

(b) $1,-2,3$

(c) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.

Joskus lukujonoon liittyvä sääntö voidaan esittää niin, että sen avulla voidaan laskea jonon mikä tahansa jäsen, jos vain tiedetään, kuinka mones jäsen on kysymyksessä. Jos esimerkiksi tiedetään, että lukujonon (a_n) *yleinen jäsen* on $a_n = 2n - 1$, voidaan laskea, että esimerkiksi

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ a_2 &= 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \\ a_3 &= 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ a_{50} &= 2 \cdot 50 - 1 = 100 - 1 = 99 \\ a_{1000} &= 2 \cdot 1000 - 1 = 2000 - 1 = 1999 \end{aligned}$$

Tällaisessa tilanteessa sanotaan, että lukujono on määritelty *analyyttisesti*.

TEHTÄVÄ 3.4: LUKUJONON JÄSENEN MÄÄRITTÄMINEN

Tarkastellaan lukujonoa (a_n), jonka jäsenet ovat muotoa $a_n = 4n + 2$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Määritä

(a) a_1

(b) a_2

(c) a_{100}.

Mihin seuraavista lukualueista tämän jonon kaikki jäsenet kuuluvat? Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$, kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$, rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$. Mikä näistä on pienin lukualue, johon kaikki jonon jäsenet kuuluvat?

TEHTÄVÄ 3.5: LUKUJONON JÄSENEN MÄÄRITTÄMINEN

Tarkastellaan lukujonoa (b_n), jonka jäsenet ovat muotoa $b_n = \frac{3n}{n+1}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Määritä

(a) a_1

(b) a_9

(c) a_{26}.

Mihin seuraavista lukualueista tämän jonon kaikki jäsenet kuuluvat? Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$, kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$, rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$. Mikä näistä on pienin lukualue, johon kaikki jonon jäsenet kuuluvat?

TEHTÄVÄ 3.6: ONKO LUKU LUKUJONON JÄSEN?

Tarkastellaan lukujonoa (a_n), jonka jäsenet ovat muotoa $a_n = 4n + 2$. Onko luku 9 lukujonon (a_n) jäsen eli esiintyykö luku 9 lukujonossa (a_n)? Entä luku 30? Perustele omin sanoin.

TEHTÄVÄ 3.7: ONKO LUKU LUKUJONON JÄSEN?

Tarkastellaan lukujonoa (b_n), jonka jäsenet ovat muotoa $b_n = 3n + 5$.

(a) Onko luku 20 lukujonon (b_n) jäsen? Jos on, niin kuinka mones jäsen se on?

(b) Onko luku 127 lukujonon (b_n) jäsen? Jos on, niin kuinka mones jäsen se on?

(c) Miten voit yleisesti tutkia, onko jokin luku lukujonon jäsen, jos lukujonon yleinen jäsen tunnetaan? Keinon tulee toimia, olipa kyseinen luku kuinka suuri tai pieni tahansa.

Edellisissä tehtävissä tutkittiin, onko annettu luku tietyn lukujonon jäsen. Esimerkiksi voidaan kysyä, onko luku 1280 edellisessä tehtävässä tarkastellun lukujonon (b_n) jäsen. Toisin sanottuna, onko olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n, että $b_n = 1280$. Jos tällainen luku n on olemassa, se kertoo, kuinka mones jonon jäsen luku 1280 on.

Kysymys, onko luku 1280 lukujonon (b_n) jäsen, johtaa siis *yhtälöön* $b_n = 1280$. Kysymykseen saadaan vastaus, kun tutkitaan, onko olemassa sellainen n, jolla tämä yhtälö toteutuu. Jos tällainen n on olemassa, se on yhtälön $b_n = 1280$ *ratkaisu*.

Koska tiedetään, että lukujonon (b_n) yleinen jäsen on $b_n = 3n + 5$, voidaan yhtälö

$$b_n = 1280$$

kirjoittaa muodossa

$$3n + 5 = 1280.$$

Tässä yhtälössä on yksi *tuntematon*, joka on tässä tapauksessa luku n. Kun yhtälö ratkaistaan, etsitään kaikki sellaiset luvut n, joilla yhtälö toteutuu eli joilla sen vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret.

Kun yhtälö ratkaistaan, voidaan sitä muokata monin eri tavoin. Tärkeää kuitenkin on, että yhtälön kummallekin puolelle tehdään aina sama asia. Tällä tavalla yhtälön oikea ja vasen puoli säilyvät yhtä suurina. Esimerkiksi yhtälön

$$3n + 5 = 1280$$

molemmilta puolilta voidaan vähentää luku 5, jolloin vasemmalle puolelle jää pelkkä $3n$ ja oikealle puolelle jää 1275. Saadaan siis uusi yhtälö

$$3n = 1275.$$

Yhtälön vasemmalla puolella olleesta yhteenlaskettavasta 5 päästiin siis eroon käyttämällä päinvastaista laskutoimitusta eli vähennyslaskua.

Yhtälön vasemmalla puolella on kuitenkin vielä ylimääräinen luku 3. Se on tuntemattoman n kerroin, joten siitä päästään eroon jakolaskun avulla. Jaetaan yhtälön molemmat puolet luvulla 3, jolloin saadaan uusi yhtälö

$$\frac{3n}{3} = \frac{1275}{3}.$$

Tämän yhtälön vasen puoli on sama kuin pelkkä n, koska kolmosella kertominen ja jakaminen kumoavat toisensa. Esimerkiksi laskimen avulla nähdään, että oikea puoli on sama kuin 425. Siis

$$n = 425.$$

Tähän mennessä tehdyt laskut osoittavat, että yhtälöllä $3n + 5 = 1280$ ei voi olla mitään muita ratkaisuja kuin $n = 425$. Vielä pitää kuitenkin tarkistaa, että luku $n = 425$ todella on tämän yhtälön ratkaisu. Jos yhtälön vasemmalle puolelle sijoitetaan $n = 425$, saadaan

$$\begin{aligned} 3n + 5 &= 3 \cdot 425 + 5 \\ &= 1275 + 5 \\ &= 1280. \end{aligned}$$

Huomataan, että vasemmasta puolesta saadaan tuloksena alkuperäisen yhtälön oikea puoli. Yhtälö siis toteutuu.

Näin on saatu selville, että yhtälöllä $3n + 5 = 1280$ eli yhtälöllä $b_n = 1280$ on yksi ratkaisu, joka on $n = 425$. Siis $b_{425} = 1280$. Tämän perusteella voidaan sanoa, että luku 1280 on lukujonon (b_n) jäsen, tarkemmin sanottuna 425. jäsen.

TEHTÄVÄ 3.8: ONKO LUKU LUKUJONON JÄSEN?

Tämä tehtävä liittyy tilanteeseen, jossa opiskelijat tutkivat, ovatko luvut 123 ja 28 erään lukujonon (a_n) jäseniä.

(a) Opiskelija A sai yhtälön $a_n = 123$ ratkaisuksi $n = 9$. Onko luku 123 lukujonon (a_n) jäsen? Jos on, niin kuinka mones jäsen se on?

(b) Opiskelija B sai yhtälön $a_n = 28$ ratkaisuksi $n = 2,6$. Onko luku 28 lukujonon jäsen? Jos on, niin kuinka mones jäsen se on?

Joskus lukujonoon liittyvä sääntö voidaan esittää niin, että sen avulla voidaan laskea jonon seuraava jäsen, jos tiedetään, mitä jonon edelliset jäsenet ovat. Tarkastellaan esimerkiksi tilannetta, jossa tiedetään, että lukujonon (a_n) ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$ ja että seuraava jäsen saadaan aina edellisestä jäsenestä lisäämällä siihen kaksi. Tämä sääntö voidaan kirjoittaa muodossa $a_1 = 1$ ja

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$ eli luonnollisilla luvuilla n, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin luku 2. Tällaisessa tilanteessa sanotaan, että lukujono on määritelty *rekursiivisesti*. Rekursioyhtälön avulla voidaan laskea, että

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\
a_3 &= a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 \\
a_4 &= a_3 + 2 = 5 + 2 = 7 \\
a_5 &= a_4 + 2 = 7 + 2 = 9 \\
a_6 &= a_5 + 2 = 9 + 2 = 11
\end{aligned}$$

TEHTÄVÄ 3.9: REKURSIIVISEN LUKUJONON JÄSENEN MÄÄRITTÄMINEN

Lukujonosta (a_n) tiedetään, että $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 4$ kaikilla $n \geq 2$. Määritä a_2, a_3, a_4, a_5 ja a_6.

TEHTÄVÄ 3.10: REKURSIIVISEN LUKUJONON JÄSENEN MÄÄRITTÄMINEN

Lukujonon (a_n) ensimmäinen jäsen on 1 ja toinen jäsen on 19. Seuraavat jäsenet saadaan laskemalla kahden edellisen jäsenen keskiarvo. Lukujono voidaan siis määritellä seuraavasti:

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 19 \\ a_n &= \dfrac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \qquad n = 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

(a) Määritä a_3 ja a_4.

(b) Miksi rekursiokaavaa

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$$

voi käyttää vasta järjestysnumerosta $n = 3$ alkaen eikä $n = 2$ alkaen?

TEHTÄVÄ 3.11: REKURSIIVINEN LUKUJONO

Rekursiivisen jonon ensimmäinen jäsen on 3 ja seuraavat saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 2.

(a) Määritä a_2, a_3 ja a_4.

(b) Selitä, miten saisit määritettyä jäsenen a_{20}.

(c) Kirjoita rekursiokaava jonon yleiselle jäsenelle a_n.

ARITMEETTINEN LUKUJONO

Lukujonoja voidaan luokitella niiden ominaisuuksien mukaan. Sovelluksissa käyttökelpoisia ovat sellaiset lukujonot, joiden jäseniä on helppo määrittää ja jotka sopivat monien ilmiöiden mallintamiseen.

TEHTÄVÄ 3.12: LUKUJONO

Millä tavalla c-kohdan lukujono on erilainen kuin muut? Selitä omin sanoin.

(a) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

(b) $2, -1, -4, -7, -10, \dots$

(c) $0, 2, 5, 9, 14, \dots$

(d) $3, -1, -5, -9, -13, \dots$

TEHTÄVÄ 3.13: LUKUJONO

Keksi sääntö, jolla seuraava jäsen saadaan laskettua edellisestä jäsenestä.

(a) $0, 4, 8, 12, 16, \dots$

(b) $1, -1, -3, -5, -7 \dots$

(c) $2, 5, 8, 11, 14, \dots$

MÄÄRITELMÄ: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Lukujono (a_n) on *aritmeettinen*, jos ja vain jos sen kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina sama eli jos on olemassa sellainen luku d, että

$$a_{n+1} - a_n = d$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$
Erotus d on nimeltään jonon *differenssi*.

Se, että lukujono on aritmeettinen, voidaan siis osoittaa tutkimalla peräkkäisten jäsenten a_{n+1} ja a_n erotusta. Tarkastellaan esimerkiksi jonoa (a_n), jolla $a_n = 7n - 3$. Sen peräkkäisten jäsenten erotus on

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 7(n+1) - 3 - (7n - 3) \\ &= 7n + 7 - 3 - 7n + 3 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Huomataan, että peräkkäisten jäsenten erotus on aina 7, joten jono (a_n) on aritmeettinen.

TEHTÄVÄ 3.14: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Keksi esimerkki aritmeettisesta lukujonosta ja luettele sen neljä ensimmäistä jäsentä, jos jonon differenssi on

(a) $d = 2$

(b) $d = -5$

(c) $d = \frac{1}{2}.$

TEHTÄVÄ 3.15: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Laske erotukset $a_2 - a_1$ ja $a_3 - a_2$. Voiko lukujono olla erotusten perusteella aritmeettinen, jos jonon ensimmäiset termit ovat

(a) $9, 6, 3$

(b) $2, 4, 8$

(c) $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}.$

TEHTÄVÄ 3.16: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Tarkastele aritmeettista lukujonoa $2,8,14, \ldots$.

(a) Kopioi alla oleva taulukko vihkoosi.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	2	8	14				

(b) Mikä on tarkastellun aritmeettisen jonon differenssi d?

(c) Täydennä taulukkoon luvut a_4 ja a_5.

(d) Keksi sääntö, jolla jonon jäsen a_n saadaan laskettua jonon ensimmäisestä jäsenestä a_1 järjestysnumeron n ja differenssin d avulla. Muodosta tämän säännön avulla lauseke jäsenelle a_n.

(e) Testaa keksimääsi sääntöä taulukon avulla. Antaako se oikean tuloksen taulukon kaikissa sarakkeissa?

Edellisessä tehtävässä havaittiin, että tarkastellun aritmeettisen jonon jäsenet pystyttiin laskemaan, kun tiedetiin jonon ensimmäinen jäsen ja differenssi. Tämä havainto koskee kaikkia aritmeettisia jonoja, kuten seuraava teoreema osoittaa. Lue teoreeman perustelu huolellisesti ja mieti jokaisen virkkeen jälkeen, mitä järkeä selityksessä on. Jos jokin kohta tuntuu hämärältä, keskustele siitä kaverin tai opettajan kanssa.

TEOREEMA 3

Aritmeettisen jonon (a_n) jäsenet saadaan laskettua, jos tiedetään jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja jonon differenssi d, sillä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Perustelu: Aritmeettisen jonon määritelmän mukaan $a_{n+1} - a_n = d$ eli $a_{n+1} = a_n + d$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Tästä saadaan seuraavat tiedot:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \end{aligned}$$

ja niin edelleen. Havaitaan säännönmukaisuus: jonon toisesta jäsenestä alkaen jäsen a_n saadaan aina summana $a_1 + (n-1)d$. Lisäksi

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot d.$$

Voidaan päätellä, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan äskeisen teoreeman soveltamista.

TEHTÄVÄ 3.17: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Määritä aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n, jos jonon ensimmäinen jäsen on 5 ja differenssi on 3.

TEHTÄVÄ 3.18: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Määritä aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n, jos jonon ensimmäiset jäsenet ovat

(a) 2 ja 7

(b) 3 ja $\frac{8}{3}$.

ARITMEETTINEN SUMMA

Edellä on tarkasteltu päättymättömiä lukujonoja. Joskus ilmiön mallintamiseen tai ongelman ratkaisemiseen tarvitaan vain äärellinen määrä lukuja lukujonon alkupäästä. Tällaisessa tilanteessa nämä luvut voidaan myös laskea yhteen tavalliseen tapaan. Toisin sanottuna voidaan muodostaa niiden summa. Jos tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa (a_n), jonka yleinen termi on $a_n = 2n - 1$, voidaan laskea vaikkapa sen viiden ensimmäisen termin summa:

$$\begin{aligned} S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ &= 25. \end{aligned}$$

Erilaiset summat luokitellaan niitä vastaavan lukujonon mukaan.

MÄÄRITELMÄ: ARITMEETTINEN SUMMA

Summa

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

on *aritmeettinen*, jos ja vain jos vastaava lukujono (a_n) on aritmeettinen.

TEHTÄVÄ 3.19: ARITMEETTINEN SUMMA

Auditoriossa on yhteensä 13 penkkiriviä. Ensimmäisellä rivillä on 20 istuinta ja seuraavalla rivillä aina kaksi enemmän kuin edeltävällä.

(a) Kuinka monta istuinta on viimeisellä eli 13. rivillä?

(b) Auditoriossa pidettävään tilaisuuteen on tulossa 300 henkilöä. Mahtuvatko kaikki tulijat istumaan? Perustele omin sanoin.

(c) Miten aritmeettinen jono liittyy tähän tehtävään?

(d) Miten aritmeettinen summa liittyy tähän tehtävään?

Koska aritmeettisessa summassa yhteenlaskettavia on äärellinen määrä, voi niiden järjestystä vaihtaa vapaasti. Laskut saattavat helpottua huomattavasti, jos yhteenlaskettavat ryhmittelee johonkin toiseen järjestykseen. Aritmeettisen summan tapauksessa erityisen kätevää on ryhmitellä yhteenlaskettavat pareiksi, joiden summa pysyy samana. Esimerkiksi edellä tarkasteltu summa voidaan ryhmitellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} S_5 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ &= (1 + 9) + (3 + 7) + 5 \\ &= 10 + 10 + 5 = 25 \end{aligned}$$

TEHTÄVÄ 3.20: ARITMEETTINEN SUMMA

Kuinka monta lukuparia muodostuu, jos yhteenlaskettavia on

(a) 6

(b) 18

(c) 15

(d) 93

(e) 191?

Saavatko kaikki yhteenlaskettavat itselleen aina parin? Jos eivät, millaisissa tapauksissa yksi jää ilman paria?

TEHTÄVÄ 3.21: ARITMEETTINEN SUMMA

Järjestä summassa esiintyvät luvut pareiksi niin, että jokaisen parin summa on sama. Laske sen jälkeen koko summa ilman apuvälineitä mahdollisimman pienellä vaivalla. Selitä, miten ajattelit.

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

(b) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$

(c) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 95 + 97 + 99$

(Kohdan (c) summa on liian pitkä kirjoitettavaksi kokonaan näkyviin.)

Edellisen tehtävän ratkaisun idea voidaan yleistää kaikille aritmeettisille summille, kuten seuraava teoreema osoittaa. Lue teoreeman perustelu huolellisesti ja mieti jokaisen virkkeen jälkeen, mitä järkeä selityksessä on. Jos jokin kohta tuntuu hämärältä, keskustele siitä kaverin tai opettajan kanssa.

TEOREEMA 4

Aritmeettinen summa $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ lasketaan niin, että termien lukumäärällä kerrotaan summan ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo eli

$$a_1 + \cdots + a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Perustelu: Kirjoitetaan summa kahteen kertaan, ensin alusta loppuun ja sitten lopusta alkuun:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

Kun nämä lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

Tässä summassa kaikki sulkujen sisällä olevat lausekkeet ovat yhtä suuria kuin $a_1 + a_n$. Aritmeettisen lukujonon määritelmän nojalla nimittäin esimerkiksi

$$\begin{aligned} a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + d) + a_{n-1} \\ &= a_1 + (a_{n-1} + d) \\ &= a_1 + a_n \end{aligned}$$

ja sen vuoksi myös

$$\begin{aligned} a_3 + a_{n-2} &= (a_2 + d) + a_{n-2} \\ &= a_2 + (a_{n-2} + d) \\ &= a_2 + a_{n-1} \\ &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Näitä yhteenlaskettavia on n kappaletta, joten voidaan päätellä, että

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

Siten

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan äskeisen teoreeman soveltamista.

TEHTÄVÄ 3.22: ARITMEETTINEN SUMMA

(a) Mitä tietoja tarvitset, jotta voit laskea aritmeettisen summan edellä esitetyn teoreeman avulla?

(b) Laske summa $2 + 5 + 8 + \ldots + 26 + 29$ aritmeettisen summan kaavalla eli edellä esitetyn teoreeman avulla.

(c) Aritmeettisen jonon (a_n) yleinen jäsen on $a_n = 3n + 1$. Laske tämän jonon kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

TEHTÄVÄ 3.23: ARITMEETTINEN SUMMA

Tasaisesti viettävään rinteeseen rakennetaan aita, jonka pituus on 126 metriä. Aidan yläreunan halutaan olevan vaakasuorassa. Aitaan tulee tolppa molempiin päihin ja aina $1,5$ metrin välein. Matalimman tolpan korkeus on $0,75$ m ja korkeimman tolpan korkeus $2,43$ m.

(a) Laske aitatolppien lukumäärä.

(b) Laske, kuinka paljon seuraava tolppa on edellistä pidempi, olettaen, että tolppien pituus kasvaa tasaisesti.

(c) Kuinka monta metriä aitatolppiin käytettävää puuta tarvitaan aidan rakentamiseen? Miten voit tässä hyödyntää aritmeettisen summan kaavaa?

(d) Kuinka monta metriä aitatolppiin käytettävää puuta tarvitaan, jos aidasta päätetään säästösyistä rakentaa vain 75 metriä matalammasta päästä alkaen?

GEOMETRINEN LUKUJONO

Edellä tutustuttiin aritmeettiseen lukujonoon, jossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Toinen lukujonotyyppi, jota tarvitaan useissa sovelluksissa, on niin sanottu geometrinen lukujono. Sitä tarvitaan esimerkiksi talouteen liittyvissä sovelluksissa kuten korkoihin ja lainoihin liittyvissä laskelmissa.

TEHTÄVÄ 3.24: LUKUJONO

Millä tavalla b-kohdan lukujono on erilainen kuin muut? Selitä omin sanoin.

(a) $2, 4, 8, 16, \ldots$

(b) $1, 3, 5, 7, \ldots$

(c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

(d) $1, 5, 25, 125, \ldots$

TEHTAVA 3.25: LUKUJONO

Keksi sääntö, jolla seuraava jäsen saadaan laskettua edellisen jäsenen avulla.

(a) $1, 3, 6, 9, \ldots$

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

(c) $3, -12, 48, -192, \ldots$

MÄÄRITELMÄ: GEOMETRINEN LUKUJONO

Lukujono (a_n) on *geometrinen*, jos ja vain jos sen kahden peräkkäisen jäsenen suhde eli osamäärä on aina sama. Toisin sanottuna jos on olemassa sellainen luku q, että

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.
Suhde q on nimeltään jonon *suhdeluku*.

Se, että lukujono on geometrinen, voidaan siis osoittaa tutkimalla peräkkäisten jäsenten a_{n+1} ja a_n suhdetta. Tarkastellaan esimerkiksi jonoa (a_n), jolla $a_n = -3 \cdot 7^n$. Sen peräkkäisten jäsenten suhde on

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{-3 \cdot 7^{n+1}}{-3 \cdot 7^n} \\ &= \frac{-3 \cdot 7^n \cdot 7}{-3 \cdot 7^n} \\ &= 7. \end{aligned}$$

Huomataan, että peräkkäisten jäsenten suhde on aina 7, joten jono (a_n) on geometrinen.

TEHTÄVÄ 3.26: GEOMETRINEN LUKUJONO

Keksi esimerkki geometrisesta lukujonosta ja luettele sen neljä ensimmäistä jäsentä, jos jonon suhdeluku on

(a) $q = 4$

(b) $q = \frac{1}{4}$

(c) $q = -\frac{1}{2}$.

TEHTÄVÄ 3.27: GEOMETRINEN LUKUJONO

Laske lukujonon peräkkäisten jäsenten suhteet $a_2 : a_1$ ja $a_3 : a_2$. Voiko lukujono olla suhteiden perusteella geometrinen, jos jonon ensimmäiset jäsenet ovat

(a) $1, 5, 15$

(b) $2, 8, 32$

(c) $4, \frac{3}{2}, \frac{9}{16}$

TEHTÄVÄ 3.28: GEOMETRINEN LUKUJONO

Tarkastele geometrista lukujonoa $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, \ldots$.

(a) Kopioi alla oleva taulukko vihkoosi.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3				

(b) Mikä on tarkastellun geometrisen jonon suhdeluku q?

(c) Täydennä taulukkoon luvut a_4 ja a_5.

(d) Keksi sääntö, jolla jonon jäsen a_n saadaan laskettua jonon ensimmäisestä jäsenestä a_1 järjestysnumeron n ja suhdeluvun q avulla. Muodosta tämän säännön avulla lauseke jäsenelle a_n.

(e) Testaa keksimääsi sääntöä taulukon avulla. Antaako se oikean tuloksen taulukon kaikissa sarakkeissa?

Edellisessä tehtävässä havaittiin, että tarkastellun geometrisen jonon jäsenet pystyttiin laskemaan, kun tiedetiin jonon ensimmäinen jäsen ja suhdeluku. Tämä havainto koskee kaikkia geometrisia jonoja, kuten seuraava teoreema osoittaa. Lue teoreeman perustelu huolellisesti ja mieti jokaisen virkkeen jälkeen, mitä järkeä selityksessä on. Jos jokin kohta tuntuu hämärältä, keskustele siitä kaverin tai opettajan kanssa.

TEOREEMA 5

Geometrisen jonon (a_n) jäsenet saadaan laskettua, jos tiedetään jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja jonon suhdeluku q, sillä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Perustelu: Geometrisen jonon määritelmän mukaan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

eli $a_{n+1} = a_n q$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Tästä saadaan seuraavat tiedot:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2 \\
a_4 &= a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3 \\
a_5 &= a_4 q = (a_1 q^3)q = a_1 q^4
\end{aligned}$$

ja niin edelleen. Havaitaan säännönmukaisuus: jonon toisesta jäsenestä alkaen jäsen a_n saadaan aina tulona $a_1 q^{n-1}$. Lisäksi

$$a_1 = a_1 q^0,$$

sillä $q^0 = 1$ kaikilla $q \neq 0$. Voidaan päätellä, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan äskeisen teoreeman soveltamista.

TEHTÄVÄ 3.29: GEOMETRINEN LUKUJONO

Määritä lauseke geometrisen lukujonon yleiselle jäsenelle, jos jonon ensimmäiset jäsenet ovat

(a) 2 ja 8

(b) -3 ja 9

(c) 1 ja $\frac{1}{7}$.

TEHTÄVÄ 3.30: GEOMETRINEN LUKUJONO

Tarkastele geometrista lukujonoa, jonka toinen jäsen $a_2 = 6$ ja suhdeluku $q = 3$. Määritä tämän lukujonon

(a) yleinen jäsen a_n

(b) yleisen jäsenen avulla 13. jäsen a_{13}.

GEOMETRINEN SUMMA

Aiemmin tutustuttiin artimeettiseen summaan, joka muodostuu, kun aritmeettisen lukujonon alkupään jäsenet lasketaan yhteen. Geometriseen lukujonoon liittyy vastaava käsite: geometrinen summa.

MÄÄRITELMÄ: GEOMETRINEN SUMMA

Summa

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

on *geometrinen*, jos ja vain jos vastaava lukujono (a_n) on geometrinen.

TEHTÄVÄ 3.31: GEOMETRINEN SUMMA

Fysioterapeutti määrää henkilölle kuntousohjelman, jossa toistetaan tiettyjä liikkeitä kerran päivässä kuukauden ajan. Ensimmäisenä päivänä liikkeitä pitää tehdä kymmenen minuutin ajan, ja seuraavina päivinä suoritusaikaa kasvatetaan aina 5 % eli se $1,05$-kertaistetaan.

(a) Kuinka monta minuuttia henkilö harjoittelee kuntoutusohjelman 2. päivänä?

(b) Kuinka monta minuuttia henkilö harjoittelee kuntoutusohjelman 10. päivänä?

(c) Kuinka monta minuuttia henkilö harjoittelee yhteensä kuntoutusohjelman viiden ensimmäisen päivän aikana?

(d) Miten geometrinen jono liittyy tähän tehtävään?

(e) Miten geometrinen summa liittyy tähän tehtävään?

Edellä perustellun teoreeman mukaan geometrisen lukujonon (a_n) jäsenet saadaan aina edellisestä jäsenestä kertomalla suhdeluvulla q. Geometrinen lukujono (a_n) on siis muotoa

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ a_1q^3,\ \ldots$$

Vastaava geometrinen summa voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}.$$

Seuraavassa teoreemassa esitetään tapa, jolla mikä tahansa geometrinen summa saadaan laskettua. Lue teoreeman perustelu huolellisesti ja mieti jokaisen virkkeen jälkeen, mitä järkeä selityksessä on. Jos jokin kohta tuntuu hämärältä, keskustele siitä kaverin tai opettajan kanssa.

TEOREEMA 6

Geometrinen summa $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ voidaan laskea seuraavasti:

- Jos suhdeluku q on ykkösestä poikkeava eli $q \neq 1$, niin

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

  Huomaa, että tässä luku n kertoo sen, kuinka monta yhteenlaskettavaa summassa on.

- Jos suhdeluku q on yksi eli $q = 1$, niin

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} = na_1.$$

Perustelu:

- Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa $q \neq 1$. Kirjoitetaan summa kahteen kertaan, ensin tavallisesti ja sitten suhdeluvulla kerrottuna:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} \\ qS_n &= q(a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}) \end{aligned}$$

  Kun alemman yhtälön oikealla puolella kerrotaan sulut auki, näyttää tilanne tältä:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} \\ qS_n &= \qquad a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n \end{aligned}$$

  Kun ylemmästä yhtälöstä vähennetään alempi, suurin osa termeistä kumoaa toisensa ja saadaan

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n.$$

  Yhtälön vasemmalta puolelta voidaan ottaa yhteinen tekijä S_n, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$(1 - q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

  Jakamalla yhtälön molemmat puolet kertoimella $1 - q$ saadaan

$$S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1 - q}.$$

Huomaa, että alussa rajoituttiin tarkastelemaan tilannetta, jossa $q \neq 1$. Sen vuoksi $1 - q \neq 0$ ja jakaminen voidaan tehdä. Saadun yhtälön oikealta puolelta voidaan vielä ottaa yhteinen tekijä a_1, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

- Jos $q = 1$, niin $S_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_1$, missä yhteenlaskettavien lukumäärä on n. Siis tässä tapauksessa $S_n = na_1$.

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan äskeisen teoreeman soveltamista.

TEHTÄVÄ 3.32: GEOMETRINEN SUMMA

Geometrisen lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 3 ja 6. Laske jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa

(a) määrittämällä ensin yhteenlaskettavat jäsenet ja laskemalla tämän jälkeen summalauseke $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 + a_{10}$.

(b) käyttämällä edellisessä teoreemassa esitettyä geometrisen summan kaavaa.

TEHTÄVÄ 3.33: GEOMETRINEN SUMMA

(a) Mitä tietoja tarvitset, jotta voit laskea geometrisen summan edellä esitetyn teoreeman avulla?

(b) Laske summa $5 + 15 + 45 + \ldots + 3645 + 10935$ geometrisen summan kaavalla eli edellä esitetyn teoreeman avulla. Tutki kokeilemalla, kuinka monta yhteenlaskettavaa tässä summassa on, eli mikä on n. Voit käyttää laskinta apuna.

(c) Geometrisen jonon (a_n) yleinen jäsen on $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Laske tämän jonon 15 ensimmäisen jäsenen summa.

TEHTÄVÄ 3.34: GEOMETRINEN SUMMA

Henkilö aloitti säästämisen vuoden 2007 alussa tallettamalla 500 euroa tilille, jonka vuotuinen korko oli $1,5\ \%$. Hän talletti tilille sen jälkeen saman summan aina vuoden alussa. Kertyneet korot lisättiin tilille vuosittain vuoden lopussa.

(a) Kuinka paljon rahaa tilillä oli vuoden 2007 lopussa koronlisäyksen jälkeen ennen toista talletusta?

(b) Kuinka suureksi summaksi vuoden 2007 alussa tehty talletus olisi kasvanut vuoden 2016 loppuun mennessä, jos tilille ei olisi tehty muita talletuksia?

(c) Kuinka suureksi summaksi vuoden 2008 alussa tehty talletus olisi kasvanut vuoden 2016 loppuun mennessä, jos tilille ei olisi tehty mitään muita talletuksia?

(d) Kuinka monta talletusta henkilö ehtii tehdä vuoden 2016 loppuun mennessä?

(e) Kuinka suureksi summaksi vuoden 2016 alussa tehty talletus olisi kasvanut vuoden 2016 loppuun mennessä, jos tilille ei olisi tehty mitään muita talletuksia?

(f) Kuinka paljon rahaa tilillä oli yhteensä vuoden 2016 lopussa koronlisäyksen jälkeen? Miten voit tässä soveltaa edellisiä kohtia ja geometrisen summan kaavaa?

(g) Jos henkilö jatkaisi säästämistä samalla tavalla, kuinka paljon rahaa hänen tilillään olisi vuoden 2050 lopussa?

TEHTÄVÄSARJA II

TEHTÄVÄ 3.35: LUKUJONO

Tarkastele lukujonoa (a_n), joka alkaa $4, 9, -5, 14, -19, 33$.

(a) Keksi sääntö, jolla tämän lukujonon jäsenet saadaan laskettua kahdesta edellisestä jäsenestä.

(b) Määritä jäsenet a_7, a_8 ja a_9.

VASTAUS

(a) $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$

(b) $a_7 = -52$, $a_8 = 85$ ja $a_9 = -137$.

TEHTÄVÄ 3.36: LUKUJONON JÄSENEN MÄÄRITTÄMINEN

Määritä lukujonon (a_n) kolme ensimmäistä jäsentä sekä 100. jäsen, jos

(a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$

(b) $a_n = n^2 + 2n$.

VASTAUS

(a) $a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{2}{5},\ a_{100} = \frac{33}{34}$

(b) $a_1 = 3,\ a_2 = 8,\ a_3 = 15,\ a_{100} = 10\,200$.

TEHTÄVÄ 3.37: LUKUJONON JÄSENEN MÄÄRITTÄMINEN

Määritä a_7 ja a_{52}, jos

(a) $a_n = 2n - 5$

(b) $a_n = -\dfrac{2}{3}n + 2$.

VASTAUS

(a) $a_7 = 9$ ja $a_{52} = 99$

(b) $a_7 = -\frac{8}{3}$ ja $a_{52} = -\frac{98}{3}$

TEHTÄVÄ 3.38: ONKO LUKU LUKUJONON JÄSEN?

Lukujonon (a_n) yleinen jäsen on $a_n = 8n - 3$. Tutki yhtälön avulla, ovatko seuraavat luvut tämän lukujonon jäseniä. Jos luku on lukujonon (a_n) jäsen, niin kuinka mones jäsen se on?

(a) 19

(b) 45

(c) 132

VASTAUS

(a) Ei ole.

(b) Kuudes jäsen.

(c) Ei ole.

TEHTÄVÄ 3.39: REKURSIIVINEN LUKUJONO

Lukujono (a_n) on määritelty seuraavasti:

$$\begin{cases} a_1 & = 2 \\ a_n & = \dfrac{a_{n-1} + 1}{2} \quad \text{kaikilla } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Määritä jonon (a_n) jäsenet a_2, a_3, a_4 ja a_5.

VASTAUS

$a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{4}$, $a_4 = \frac{9}{8}$, $a_5 = \frac{17}{16}$

Tehtävissä, joissa halutaan selvittää rekursiivisen lukujonon jäseniä, laskimesta on suuri apu. Laskimista löytyy ans-näppäin, joka tarkoittaa aina viimeisintä tulosta. Kyseistä näppäintä voi käyttää rekursiokaavassa alkuehdon paikalla. Tarkastellaan esimerkiksi edellisen tehtävän lukujonoa, jolle

$$\begin{cases} a_1 & = 2 \\ a_n & = \dfrac{a_{n-1} + 1}{2} \quad \text{kaikilla } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Selvitetään tämän jonon 10. jäsen. Käsin se olisi melko hidasta, mutta laskimella se onnistuu nopeasti seuraavalla tavalla:

Syötetään laskimeen aluksi alkuarvo 2 ja painetaan enter. Syötetään tämän jälkeen rekursiokaava niin, että korvataan edeltävä jäsen a_{n-1} ans-näppäimellä. Painetaan tämän jälkeen enter ja saadaan jonon toinen jäsen, joka on tässä tapauksessa $\frac{3}{2}$. Tässä laskin syötti ans-napin kohdalle siis luvun 2. Kun tämän jälkeen painetaan taas enter, saadaan jonon kolmas jäsen, joka tässä tapauksessa on $\frac{5}{4}$. Taulukoidaan kaikki jäsenet paperille näkyviin ja jatketaan enter-napin painamista, kunnes saadaan jonon kymmenes jäsen. Jonon kymmenenneksi jäseneksi saadaan tällä tavalla $\frac{513}{512}$.

TEHTÄVÄ 3.40: REKURSIIVINEN LUKUJONO

Tutki jonoa (a_n), jolle

$$\begin{cases} a_1 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 4 \text{ kaikilla } n = 2, 3, 4 \ldots \end{cases}$$

(a) Määritä laskimen avulla lukujonon jäsenet 9. jäseneen asti ja kokoa ne taulukkoon.

(b) Tutki laskimen avulla, kuinka moni jonon jäsenistä on pienempi kuin luku 100.

VASTAUS

(a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35.

(b) 25 jäsentä on pienempiä kuin luku 100.

TEHTÄVÄ 3.41: LUKUJONON MÄÄRITTELY

Lukujonon (a_n) ensimmäinen jäsen on 3, *kolmas* jäsen on 27 ja neljäs jäsen on 81.

(a) Päättele, mikä on lukujonon toinen jäsen a_2.

(b) Keksi sääntö, miten jäsen a_n saadaan lausuttua edellisen jäsenen a_{n-1} avulla. Toisin sanottuna määrittele lukujono (a_n) rekursiivisesti.

(c) Keksi sääntö, miten jäsen a_n saadaan lausuttua järjestysnumeron n avulla. Toisin sanottuna määrittele lukujono (a_n) analyyttisesti.

VASTAUS

(a) 9

(b) $a_1 = 3$ ja $a_n = 3a_{n-1}$.

(c) $a_n = 3^n$

TEHTÄVÄ 3.42: LUKUJONON MÄÄRITTELY

Tarkastele parillisten positiivisten kokonaislukujen $2, 4, 6, \ldots$ muodostamaa lukujonoa (a_n).

(a) Keksi sääntö, miten jäsen a_n saadaan lausuttua edellisen jäsenen a_{n-1} avulla. Toisin sanottuna määrittele lukujono (a_n) rekursiivisesti.

(b) Keksi sääntö, miten jäsen a_n saadaan lausuttua järjestysnumeron n avulla. Toisin sanottuna määrittele lukujono (a_n) analyyttisesti.

VASTAUS

(a) $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$.

(b) $a_n = 2n$

TEHTÄVÄ 3.43: LUKUJONON MÄÄRITTELY

Tarkastele parittomien positiivisten kokonaislukujen $1, 3, 5, \ldots$ muodostamaa lukujonoa (b_n).

(a) Keksi sääntö, miten jäsen b_n saadaan lausuttua edellisen jäsenen b_{n-1} avulla. Toisin sanottuna määrittele lukujono (b_n) rekursiivisesti.

(b) Keksi sääntö, miten jäsen b_n saadaan lausuttua järjestysnumeron n avulla. Toisin sanottuna määrittele lukujono (b_n) analyyttisesti.

VASTAUS

(a) $b_1 = 1$ ja $b_n = b_{n-1} + 2$.

(b) $b_n = 2n - 1$

TEHTÄVÄ 3.44: LUKUJONO

Henkilö aloittaa lenkkeilyharrastuksen. Ensimmäinen lenkki on kilometrin mittainen ja seuraava lenkki aina 200 metriä pidempi kuin edellinen.

(a) Kuinka pitkä on henkilön seitsemäs lenkki?

(b) Määrittele rekursiivisesti jono (a_n), missä a_n on n:ntenä päivänä tehdyn lenkin pituus.

(c) Määrittele analyyttisesti jono (a_n), missä a_n on n:ntenä päivänä tehdyn lenkin pituus.

(d) Jos henkilö käy lenkillä kolme kertaa viikossa, kuinka monennella viikolla hän juoksee ensimmäisen kerran vähintään maratonin mittaisen lenkin (42,195 km)?

VASTAUS

(a) 2200 m

(b) $a_1 = 1000$ ja $a_n = a_{n-1} + 200$

(c) $a_n = 1000 + 200(n - 1)$

(d) 69. viikolla.

TEHTÄVÄ 3.45: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Tarkastele aritmeettista lukujonoa $1, 4, 7, \ldots$.

(a) Mikä on jonon differenssi d?

(b) Päättele jonon 10. jäsen.

(c) Muodosta analyyttinen lauseke yleiselle jäsenelle a_n.

(d) Muodosta rekursiivinen lauseke yleiselle jäsenelle a_n.

(e) Onko luku 20 jonon jäsen? Perustele.

VASTAUS

(a) $d = 3$

(b) $a_{10} = 28$

(c) $a_n = 1 + 3(n - 1)$

(d) $a_n = a_{n-1} + 3$

(e) Ei ole.

TEHTÄVÄ 3.46: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Tutki, voiko jono olla aritmeettinen, jos sen peräkkäiset jäsenet ovat

(a) 6, 10 ja 14

(b) π, 3π ja 5π

(c) 3, 3 ja 3.

Perustele omin sanoin.

VASTAUS

(a) Voi olla.

(b) Voi olla.

(c) Voi olla.

TEHTÄVÄ 3.47: ARITMEETTINEN LUKUJONO

Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi on 2 ja viides on 4. Mikä on jonon kymmenes termi?

VASTAUS

6,5

TEHTÄVÄ 3.48: ARITMEETTINEN SUMMA

Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on $a_n = 3n + 1$. Määritä jonon kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

VASTAUS

650

TEHTÄVÄ 3.49: ARITMEETTINEN SUMMA

Auditorion ensimmäisellä rivillä on 14 istuinta ja seuraavalla rivillä aina 2 istuinta enemmän. Kuinka monta istuinta auditoriossa yhteensä on, kun viimeisellä rivillä on 38 istuinta?

VASTAUS

338 istuinta. Onnistuitko ratkaisemaan tehtävän aritmeettisena summana?

TEHTÄVÄ 3.50: ARITMEETTINEN SUMMA

Päättele, kuinka monta aritmeettisen jonon jäsentä pitää vähintään laskea yhteen, jotta summa ylittää 100, jos

(a) jonon toinen jäsen on 7 ja neljäs 15

(b) jonon yleinen jäsen on $a_n = 8n + 2$.

Selitä, miten ajattelit.

VASTAUS

(a) 7 jäsentä

(b) 5 jäsentä.

TEHTÄVÄ 3.51: GEOMETRINEN LUKUJONO

Tarkastele geometrista lukujonoa (b_n), jonka yleinen jäsen on $b_n = 5 \cdot 4^{n-1}$.

(a) Määritä jonon kolme ensimmäistä jäsentä.

(b) Mikä on jonon suhdeluku q?

VASTAUS

(a) 5, 20, 80.

(b) $q = 4$

TEHTÄVÄ 3.52: GEOMETRINEN LUKUJONO

Tarkastele geometrista lukujonoa $\frac{3}{2}, 3, 6, 12, \ldots$.

(a) Mikä on jonon suhdeluku q?

(b) Päättele jonon 6. jäsen.

(c) Muodosta analyyttinen lauseke yleiselle jäsenelle a_n.

(d) Muodosta rekursiivinen lauseke yleiselle jäsenelle a_n.

(e) Onko luku 20 jonon jäsen? Perustele.

VASTAUS

(a) $q = 2$

(b) $a_6 = 48$

(c) $a_n = \frac{3}{2}n$

(d) $a_1 = \frac{3}{2}$ ja $a_n = 2a_{n-1}$

(e) Ei ole.

TEHTÄVÄ 3.53: GEOMETRINEN LUKUJONO

Palauta mieleen, mikä on geometrisen lukujonon määritelmä. Tutki sen avulla, voiko jono olla geometrinen, jos sen ensimmäiset jäsenet ovat

(a) $1, 3, 5$

(b) $1, -1, 1$

(c) π, π, π.

Myönteisessä tapauksessa määritä jonon suhdeluku q sekä jonon yleinen jäsen a_n.

VASTAUS

(a) Ei

(b) Kyllä, suhdeluku $q = -1$ ja yleinen jäsen $a_n = 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

(c) Kyllä, suhdeluku $q = 1$ ja yleinen jäsen $a_n = \pi \cdot 1^{n-1} = \pi$.

TEHTÄVÄ 3.54: GEOMETRINEN LUKUJONO

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on 3 ja kolmas jäsen on 12.

(a) Päättele jonon suhdeluku. Huomaa kaksi eri vaihtoehtoa.

(b) Muodosta jonon yleinen jäsen a_n.

(c) Määritä yleisen jäsenen avulla a_{12}.

VASTAUS

(a) Suhdeluku on 2 tai -2.

(b) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ tai $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

(c) $a_{12} = 6144$ tai $a_{12} = -6144$.

TEHTÄVÄ 3.55: GEOMETRINEN SUMMA

Laske geometrisen jonon $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ kymmenen ensimmäisen jäsenen summa. Syötä lauseke laskimeen siten, että saat vastauksen murtolukuna.

VASTAUS

$S_{10} = \frac{1023}{128}$.

TEHTÄVÄ 3.56: GEOMETRINEN SUMMA

Laske geometrisen lukujonon $6,\ -18, 54, \ldots$ kolmentoista ensimmäisen jäsenen summa.

VASTAUS

$S_{13} = 2391486$

TEHTÄVÄ 3.57: LUKUJONON PIIRTÄMINEN LASKIMELLA

Selvitä, miten voit piirtää laskimellasi lukujonon ja tarkastella sen arvoja taulukosta. Esimerkiksi TI Nspire CAS CX -laskimella se onnistuu Kuvaajat-sovelluksessa valitsemalla Kuvaajan syöttö/muokkaus -kohdasta Sekvenssi. Taulukon, johon laskin automaattisesti laskee lukujonon arvoja näkyviin, saa komennolla Ctrl+T. Lisätietoja TI Nspire:n laskimesta löytyy esimerkiksi täältä Opetusvinkistä 2/2016.

Piirrä seuraavat lukujonot:

(a) $a_n = 3n - 1$

(b) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(c) $a_1 = 3$ ja $a_n = \frac{3a_{n-1}}{2} - \frac{1}{a_{n-1}}$ kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 2$.

Tutki, ovatko nämä lukujonot aritmeettisia tai geometrisia.

VASTAUS

(a) Aritmeettinen

(b) Geometrinen

(c) Ei kumpikaan

TEHTÄVÄSARJA III

TEHTÄVÄ 3.58:

Säilyketölkeistä rakennetaan torni niin, että alimmassa kerroksessa on 22 tölkkiä ja seuraavalla aina kolme vähemmän. Kuinka monta kerrosta tölkkitorniin voi näin tehdä? Kuinka monta tölkkiä tornissa on?

VASTAUS

8 kerrosta, yhteensä 92 tölkkiä.

TEHTÄVÄ 3.59:

Tutki, onko lukujono aritmeettinen, jos sen yleinen jäsen on

(a) $a_n = 2n - 5$

(b) $a_n = -\frac{2}{3}n + 2$

(c) $a_n = 1 + \frac{2}{n}$.

Jos lukujono on aritmeettinen, mikä on sen differenssi?

VASTAUS

(a) $d = 2$

(b) $d = -\frac{2}{3}$

(c) Jono ei ole aritmeettinen.

TEHTÄVÄ 3.60:

Tarkastele lukujonoa (a_n), jolle $a_n = 2 \cdot 3^n$.

(a) Tutki, onko kysymyksessä geometrinen lukujono. Jos on, määritä sen suhdeluku.

(b) Palauta mieleen, miten tutkit, onko luku jonkin lukujonon jäsen.

(c) Tutki, onko luku $1\,062\,882$ lukujonon (a_n) jäsen. Ratkaisussa muodostuvan yhtälön voit ratkaista laskimella.

(d) Tutki, onko luku $118\,096$ lukujonon (a_n) jäsen samaan tapaan kuin edellisessä kohdassa.

VASTAUS

(a) $q = 3$

(b)

(c) On.

(d) Ei.

TEHTÄVÄ 3.61:

Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa? [Lyhyt K2014/8]

Vihje: Hahmottele paperille, miten huijaus etenee, esimerkiksi piirtämällä puumalli. Muodostava tarvittava yhtälö ja ratkaise yhtälö laskimella.

VASTAUS

19 vaiheen jälkeen.

TEHTÄVÄ 3.62:

Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella. [Lyhyt K2012/7]

Vihje: Hahmottele sähköpostin saaneita, ei siis ensimmäistä lähettäjää, paperille ja yritä mallintaa tilanne joksikin tutuksi lukujonoksi tai summaksi.

VASTAUS

2 h 10 min.

TEHTÄVÄ 3.63:

Erään kaivoksen kivihiilivarojen laskettiin vuoden 2015 alussa riittävän 50 vuodeksi, jos louhintatahti (yksikkönä tonnia/vuosi) pysyy samana. Minä vuonna kivihiilivarat loppuvat, jos louhintaa lisätään joka vuosi 2,5 % edelliseen vuoteen verrattuna?
[Pitkä S2015/8]

VASTAUS

Kivihiilivarat loppuisivat vuoden 2048 aikana.

TEHTÄVÄ 3.64:

Eräs menetelmä luvun $\sqrt[3]{a}$ likiarvojen laskemiseksi perustuu kaavaan

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{(x_n)^2}\right),$$

kun $n = 1, 2, \ldots$ ja $x_1 = 1$. Tarkastellaan kyseistä jonoa $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, kun $a = 9$. Millä indeksin n arvolla näin lasketut likiarvot toteuttavat ensimmäisen kerran seuraavan ehdon: lukujen x_n ja x_{n+1} seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat? [Lyhyt K2014/11]

VASTAUS

$n = 7$

TEHTÄVÄ 3.65:

Lukujonossa (a_n) on $a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{12}{5}$. Määritä jonon sadan ensimmäisen termin summa, kun jono on

(a) aritmeettinen

(b) geometrinen. Anna tämän kohdan vastaus miljoonan tarkkuudella.

[Lyhyt K2013/11]

VASTAUS

(a) 2180

(b) 828 miljoonaa

TEHTÄVÄ 3.66:

Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 10 ja toinen termi 12. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 2 ja suhdeluku $q = \frac{21}{20}$. Monennestako termistä lähtien geometrisen jonon termi on suurempi kuin vastaava aritmeettisen jonon termi? Muodosta tarvittava epäyhtälö ja etsi sille ratkaisu kokeilemalla. [Lyhyt K2011/13]

VASTAUS

96. termistä lähtien.

TEHTÄVÄ 3.67:

Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 1, viimeinen termi on 61, ja jonon termien summa on 961. Mikä on jonon toinen termi?
[Lyhyt K2009/13]

VASTAUS

3

TEHTÄVÄ 3.68:

Lukujonon ensimmäinen termi on 2, ja jonon kukin seuraava termi on 5 % suurempi kuin edellinen termi. Muodosta jonon n:nnen termin lauseke. Tutki tämän avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa. Laske näiden termien summa kolmen numeron tarkkuudella.
[Lyhyt S2008/10]

Vihje: Ratkaise muodostuva yhtälö laskimella.

VASTAUS

Jonon n:s termi on $2 \cdot 1,05^{n-1}$, 411 termiä alittaa 1000 miljoonaa ja näiden termien summa on $2{,}046 \cdot 10^{10}$.

TEHTÄVÄ 3.69:

Äiti pitää kakkukestit kolmelle lapselleen. Äiti jakaa kakun ensin neljään osaan, joista kolme osaa hän antaa lapsille. Kun lapset ovat syöneet, äiti jakaa jäljelle jääneen neljännen osan jälleen neljään osaan, joista kolme osaa hän antaa lapsilleen. Näin hän jatkaa edelleen jakaen neljättä osaa, kunnes on tehnyt vastaavan jako-operaation n kertaa. Muodosta lauseke, joka ilmaisee lapsille jaetun kakkumäärän osuuden alkuperäisestä kakusta.

Vihje: Kirjaa taulukkoon äidille jäävä osuus eri vaiheissa.

VASTAUS

$1 - \frac{1}{4^n}$

TEHTÄVÄ 3.70:

Tarkastellaan lukujonoja (a_n) ja (b_n), joiden kaikki termit a_n ja b_n, $n = 1, 2, \ldots$, ovat positiivisia.

(a) Oletetaan, että jono (a_n) on geometrinen. Osoita, että $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ kaikilla $n = 2, 3, \ldots$

(b) Oletetaan, että $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ kaikilla $n = 2, 3, \ldots$ Osoita, että jono (b_n) on geometrinen.

[Pitkä S2014/8]

VASTAUS

Ratkaisu löytyy täältä.

TEHTÄVÄ 3.71:

(a) Geometrisen jonon kaksi peräkkäistä termiä ovat rationaalilukuja. Osoita, että jonon kaikki termit ovat rationaalilukuja.

(b) Geometrisessa jonossa on ainakin kaksi rationaalista termiä. Osoita, että rationaalisia termejä on äärettömän monta.

[Pitkä S2012/11]

VASTAUS

Ratkaisu löytyy täältä.

ITSEARVIOINTITEHTÄVÄT

Varmista, että olet oppinut tämän luvun keskeiset asiat tekemällä itsearviointitesti opetus.tv:n polku-palvelussa. Samalla harjoittelet omien ratkaisujesi pisteyttämistä pisteytysohjeiden avulla.

Funktio

LUVUN TAVOITTEET

Tämän luvun tavoitteena on, että tunnet funktion käsitteen ja osaat piirtää ja tulkita funktioiden kuvaajia. Osaat

- tunnistaa, onko sääntö funktio, ja päätellä, mikä on funktion määrittelyehto
- määrittää funktion arvon tietyssä kohdassa kuvaajasta päättelemällä, käsin laskemalla ja laskimen avulla
- lukea kuvaajasta funktion nollakohdat sekä sen, missä funktion arvot ovat positiivisia ja missä negatiivisia
- piirtää laskimella funktion kuvaajan
- tunnistaa ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaajan ominaisuuksia funktion lausekkeesta
- tunnistaa eksponentti- ja logartimifunktioiden kuvaajat.

FUNKTIO

Tässä luvussa tutustutaan funktion käsitteeseen. Sen avulla voidaan mallintaa ja tutkia erilaisten mitattavissa olevien asioiden välisiä riippuvuuksia, kuten esimerkiksi pyöräilijän tiettynä aikana kulkeman matkan riippuvuutta pyöräilijän vauhdista tai työntekijän maksamien verojen määrän riippuvuutta työntekijän tuloista.

Funktio on siis jonkinlainen sääntö, joka kertoo, miten jokin asia liittyy toiseen. Ennen kuin sovimme tarkemmin, mitä funktion käsitteellä tarkoitetaan, tutkitaan seuraavissa tehtävissä muutamien erilaisten sääntöjen ominaisuuksia.

TEHTÄVÄ 4.1: ERILAISIA SÄÄNTÖJÄ

Tutkitaan sääntöä f, joka liittää jokaiseen luonnolliseen lukuun sen numeroiden summan. Siis esimerkiksi lukuun 156 sääntö f liittää luvun $1 + 5 + 6 = 12$. Tämä voidaan merkitä

$$f(156) = 1 + 5 + 6 = 12.$$

(a) Minkä luvun sääntö f liittää lukuun 389? Toisin sanottuna, mikä on $f(389)$?

(b) Minkä luvun sääntö f liittää lukuun $106\,437$? Toisin sanottuna, mikä on $f(106\,437)$?

(c) Onko olemassa jokin luonnollinen luku, jonka tapauksessa säännön f antamaa tulosta ei voida laskea? Selitä omin sanoin.

(d) Onko olemassa jokin luonnollinen luku, johon sääntö f liittää useita eri lukuja? Selitä omin sanoin.

TEHTAVA 4.2: ERILAISIA SAANTOJA

Tutkitaan sääntöä g, joka liittää jokaiseen kaksinumeroiseen luonnolliseen lukuun sen numeroiden erotuksen käänteisluvun. Siis esimerkiksi lukuun 36 sääntö g liittää luvun

$$\frac{1}{3-6} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Tämä voidaan merkitä

$$g(36) = \frac{1}{3-6} = -\frac{1}{3}.$$

(a) Minkä luvun sääntö g liittää lukuun 94? Toisin sanottuna, mikä on $g(94)$?

(b) Minkä luvun sääntö g liittää lukuun 77? Toisin sanottuna, mikä on $g(77)$?

(c) Onko olemassa jokin kaksinumeroinen luonnollinen luku, jonka tapauksessa säännön g antamaa tulosta ei voida laskea? Selitä omin sanoin.

(d) Onko olemassa jokin kaksinumeroinen luonnollinen luku, johon sääntö g liittää useita eri lukuja? Selitä omin sanoin.

TEHTÄVÄ 4.3: ERILAISIA SÄÄNTÖJÄ

Tutkitaan sääntöä h, joka liittää jokaiseen murtolukumuodossa kirjoitettuun rationaalilukuun sen osoittajan ja nimittäjän summan. Siis esimerkiksi lukuun $\frac{42}{105}$ sääntö h liittää luvun $42 + 105 = 147$. Tämä voidaan merkitä

$$h\left(\frac{42}{105}\right) = 42 + 105 = 147.$$

(a) Minkä luvun sääntö h liittää lukuun $\frac{2}{4}$? Toisin sanottuna, mikä on $h\left(\frac{2}{4}\right)$?

(b) Minkä luvun sääntö h liittää lukuun $\frac{1}{2}$? Toisin sanottuna, mikä on $h\left(\frac{1}{2}\right)$?

(c) Onko olemassa jokin rationaaliluku, jonka tapauksessa säännön h antamaa tulosta ei voida laskea? Selitä omin sanoin.

(d) Onko olemassa jokin rationaaliluku, johon sääntö h liittää useita eri lukuja? Selitä omin sanoin.

Edellisissä tehtävissä tutkittiin erilaisia sääntöjä, jotka kaikki liittivät tietyn joukon lukuihin toisia lukuja. Sellaista sääntöä, joka liittää tietyn joukon jokaiseen alkioon täsmälleen yhden alkion, sanotaan funktioksi.

MÄÄRITELMÄ: FUNKTIO

Funktio joukosta X joukkoon Y tarkoittaa sääntöä, joka liittää joukon X jokaiseen alkioon täsmälleen yhden alkion joukosta Y.
Tässä esiintyvä joukko X on funktion *määrittelyjoukko* eli *lähtöjoukko* ja joukko Y on funktion *maalijoukko*.

TEHTÄVÄ 4.4: FUNKTIO

Tarkastele vielä tehtävien 1-3 sääntöjä f, g ja h.

(a) Onko sääntö f funktio? Selitä omin sanoin.

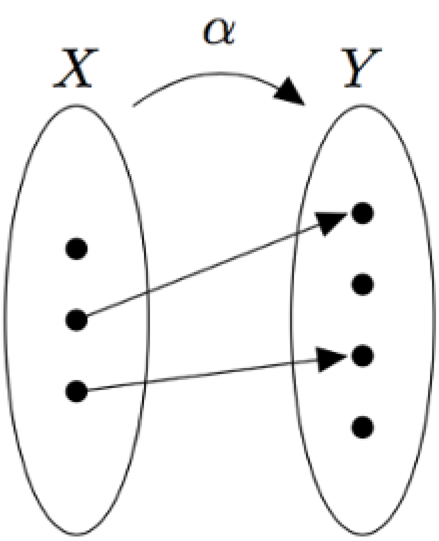
(b) Onko sääntö g funktio? Selitä omin sanoin.

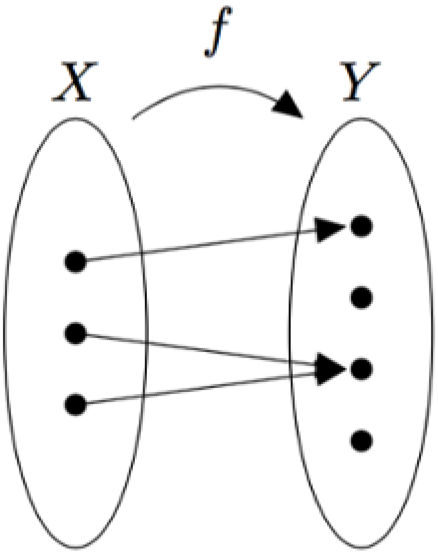
(c) Onko sääntö h funktio? Selitä omin sanoin.

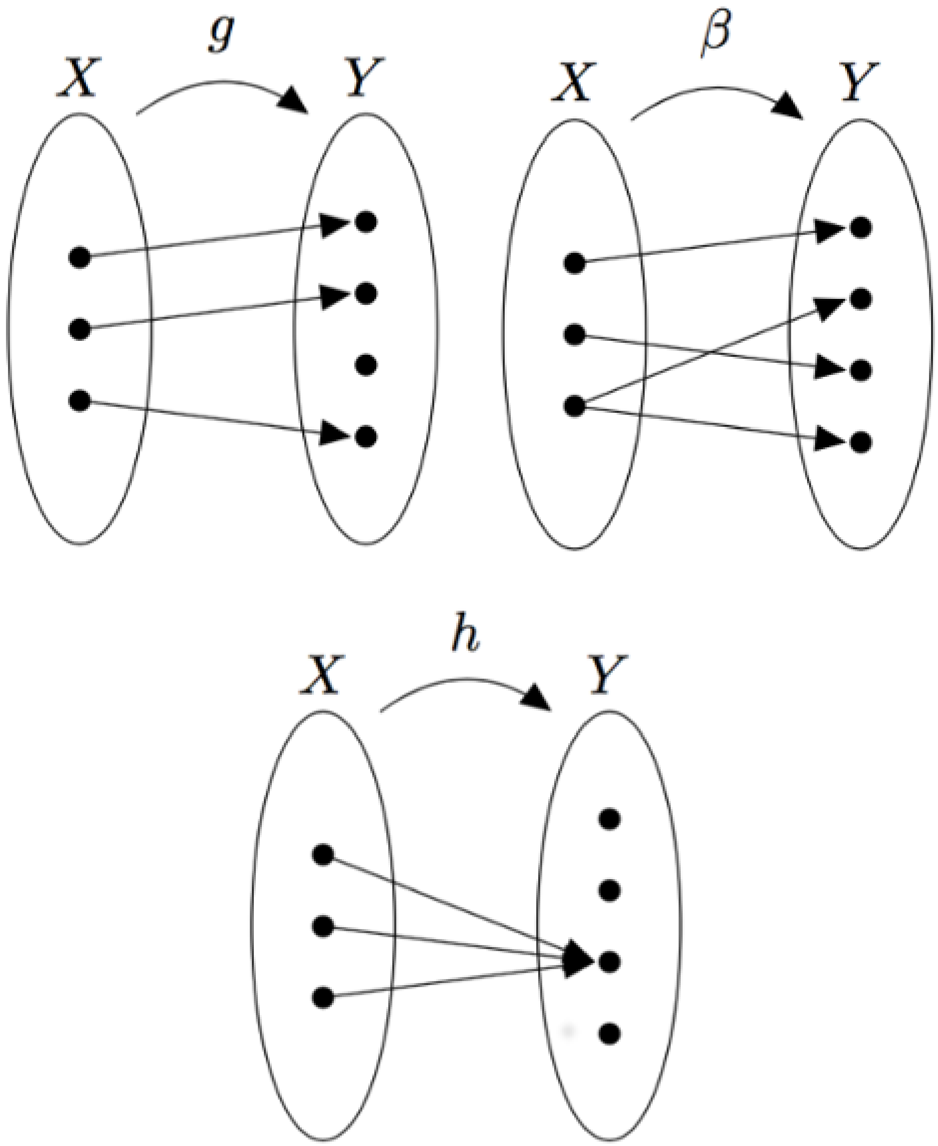
(d) Valitse säännöistä f, g ja h yksi, joka on funktio. Mikä on sen määrittelyjoukko? Entä minkä lukujoukon voi valita sen maalijoukoksi? Keksi kaksi erilaista vaihtoehtoa maalijoukoksi.

TEHTÄVÄ 4.5: FUNKTIO

Tarkastele alla olevia kuvia, joissa on kuvattu säännöt α, f, g, β ja h. Mitkä näistä säännöistä ovat funktioita joukosta X joukkoon Y? Perustele omin sanoin.







Joskus funktion sääntö voidaan ilmaista lausekkeen avulla. Esimerkiksi merkintä

$$f(x) = 2x + 1$$

ilmaisee sen, että funktio f liittää lukuun x luvun $2x + 1$. Funktio f siis kertoo luvun x kahdella ja lisää tulokseen luvun 1.

TEHTÄVÄ 4.6: FUNKTION ARVON LASKEMINEN

Tarkastellaan funktiota $h(x) = -x^2 - 3x + 1$.

(a) Laske funktion h arvo kohdassa $x = 2$. Toisin sanottuna laske, mitä on $h(2)$.

(b) Kaksi opiskelijaa laski funktion h arvon kohdassa $x = -4$. Opiskelija A laski seuraavasti:

$$\begin{aligned} h(-4) &= --4^2 - 3 \cdot -4 + 1 \\ &= +4^2 + 12 + 1 \\ &= 16 + 12 + 1 = 29. \end{aligned}$$

Opiskelija B puolestaan laski näin:

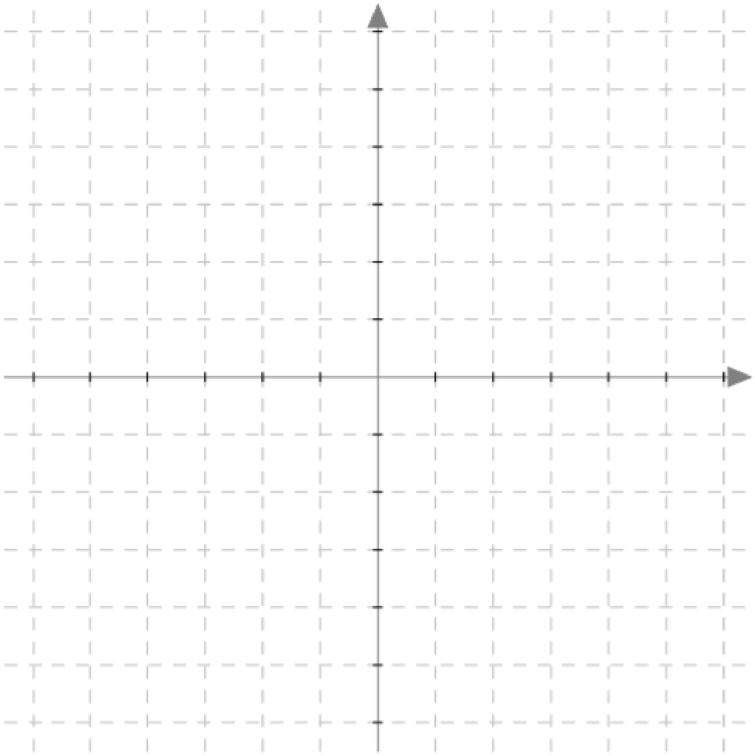
$$\begin{aligned} h(-4) &= -(-4)^2 - 3 \cdot (-4) + 1 \\ &= -16 + 12 + 1 = -3. \end{aligned}$$

Kumman lasku oli oikein?

(c) Laske funktion h arvo kohdassa $x = -\frac{1}{2}$.

TEHTÄVÄ 4.7: KOORDINAATISTON PISTEET

Piirrä vihkoosi samanlainen koordinaatisto kuin alla ja merkitse siihen pisteet $(2, -1)$, $(-3, 0)$, $(5, 2)$, $(-4, 1)$, $(1, 0)$, $(6, 3)$, $(-5, 2)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(-6, 3)$, $(-2, -1)$, $(4, 1)$ ja $(-1, 0)$. Millainen kuvio koordinaatistoon syntyy?



Monia funktioita voidaan havainnollistaa piirtämällä funktion *kuvaaja* koordinaatistoon. Jotta kuvaaja voidaan piirtää, täytyy tietää, mitä arvoja funktio saa muuttujan eri arvoilla. Kuvaajaa piirrettäessä muuttujan arvot luetaan vaaka-akselilta (x-akselilta) ja funktion arvot pystyakselilta (y-akselilta).

TEHTÄVÄ 4.8: FUNKTION ARVON LASKEMINEN JA FUNKTION KUVAAJA

Tutkitaan vielä funktiota f, jolla

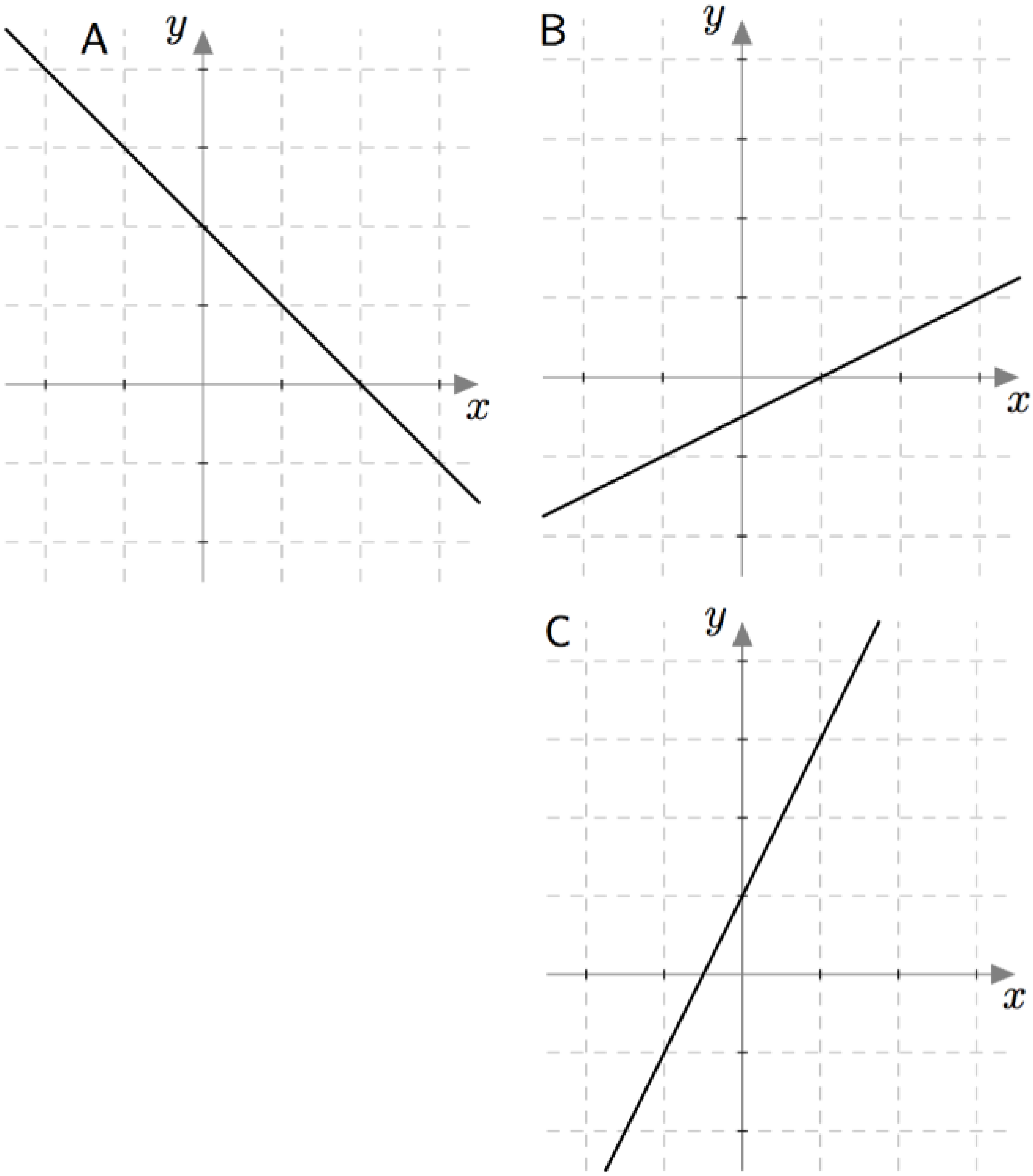
$$f(x) = 2x + 1.$$

(a) Täydennä alla oleva taulukko:

x	$f(x) = 2x + 1$
1	$f(1) =$
7	

0	
-6	
a	
b	

(b) Mikä seuraavista on funktion f kuvaaja? Käytä päättelyssä apuna taulukkoa, jonka täydensit a-kohdassa.



(c) Päättele kuvaajan avulla, millä muuttujan x arvolla funktio f saa arvon 0. Toisin sanottuna etsi sellaiset luvut x, joilla $f(x) = 0$.

Edellä tarkasteltu funktio f on määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Se tarkoittaa, että funktion f arvo voidaan laskea, olipa muuttujan x arvo mikä tahansa reaaliluku. Esimerkiksi jos $x = 135{,}8642$, on funktion f arvo

$$f(135{,}8642) = 2 \cdot 135{,}8642 + 1 = 272{,}7284.$$

On olemassa myös sellaisia funktiota, joiden arvo ei joidenkin muuttujan arvojen tapauksessa ole määritelty. Esimerkiksi funktion

$$g(x) = \frac{1}{x-2}$$

arvo ei ole määritelty, jos $x = 2$, sillä nimittäjä on tällöin nolla. Tässä tilanteessa sanotaan, että funktio g ei ole määritelty kohdassa $x = 2$. Funktion yhteyteen on hyvä liittää tieto siitä, millä muuttujan arvoilla funktio on määritelty:

$$g(x) = \frac{1}{x-2}, \qquad \text{missä } x \neq 2.$$

TEHTÄVÄ 4.9: FUNKTION MÄÄRITTELYEHTO

Millä reaaliluvuilla seuraavat funktiot ovat määriteltyjä? Kirjoita jokaiselle funktiolle määrittelyehto.

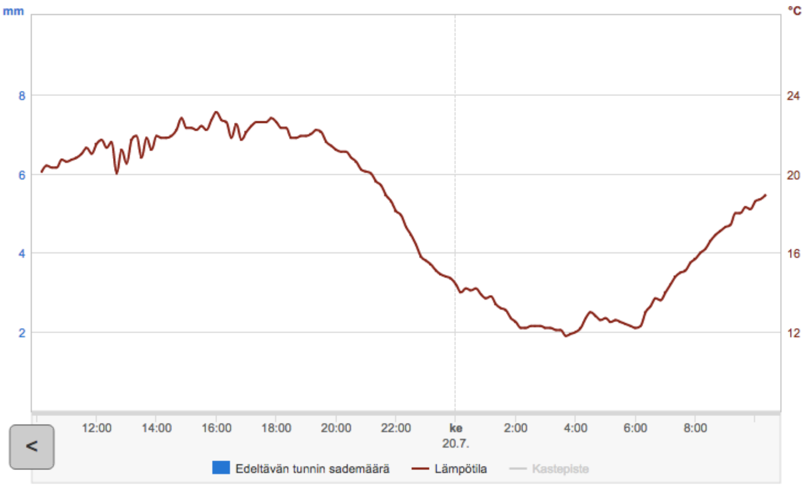
(a) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

(b) $g(x) = \dfrac{-12}{x+9}$

(c) $h(x) = \dfrac{6x+5}{2x-8}$

FUNKTION KUVAAJA

Funktion kuvaajan avulla voidaan tehdä päätelmiä sellaisissakin tilanteissa, joissa funktion esittäminen lausekkeen avulla on hankalaa. Esimerkiksi alla olevasta kuvassa on näkyvissä lämpötila ajan funktiona Ilmatieteen laitoksen Kumpulan havaintoasemalla Helsingissä (kuvankaappaus Ilmatieteenlaitoksen sivuilta).



TEHTÄVÄ 4.10: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

Tarkastele yllä olevaa kuvaajaa, joka esittää lämpötilaa ajan funktiona.

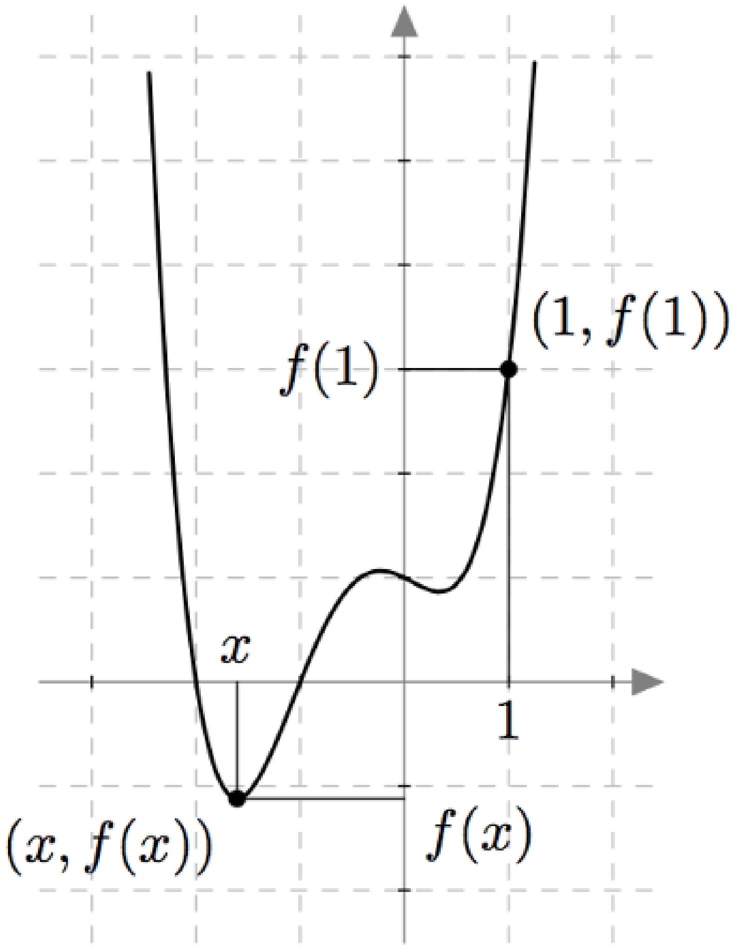
(a) Mikä on ollut vuorokauden korkein lämpötila? Milloin se on saavutettu?

(b) Mikä on ollut vuorokauden matalin lämpötila? Milloin se on saavutettu?

(c) Millä aikavälillä lämpötila on ollut yli 20 astetta?

(d) Millä aikavälillä lämpötila on ollut alle 16 astetta?

Funktion kuvaajan pisteen y-koordinaatti ilmaisee aina funktion arvon kyseisessä kohdassa. Esimerkiksi alla olevassa kuvassa funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta. Tästä voidaan päätellä, että funktion f arvo kohdassa $x = 1$ on $f(1) = 3$.



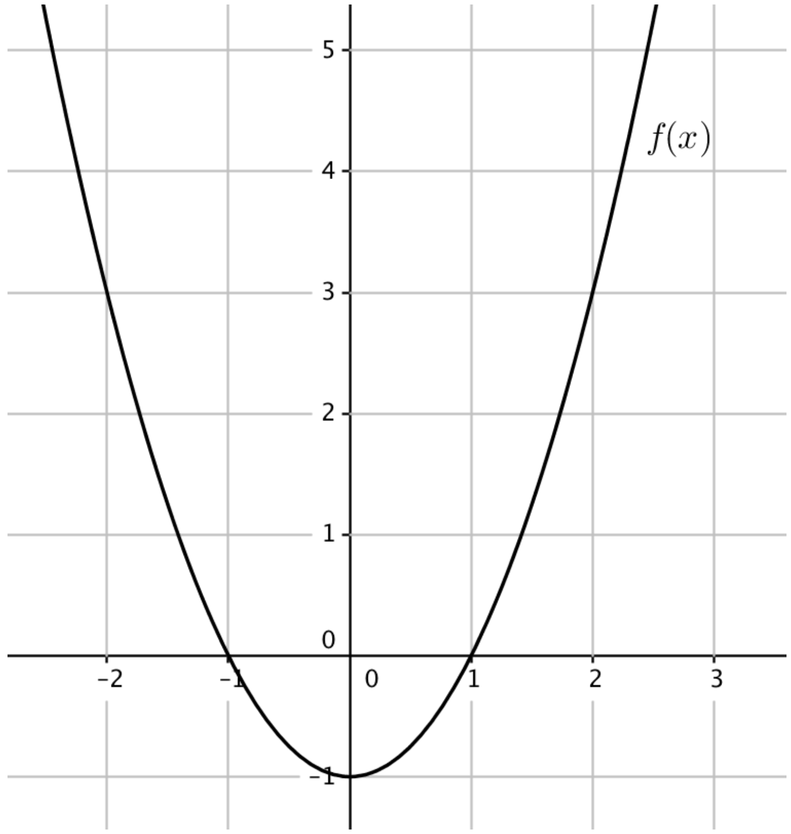
TEHTÄVÄ 4.11: FUNKTION ARVON LUKEMINEN KUVAAJASTA

Alla on funktion f kuvaaja. Päättele sen avulla vastaukset seuraaviin kysymyksiin:

(a) Minkä arvon funktio saa kohdassa $x = -1$?

(b) Mitä on $f(0)$?

(c) Mitä on $f(2)$? Saako funktio f tämän arvon jossain muussakin kohdassa kuin kohdassa $x = 2$?



Edellisen tehtävän funktion kuvaaja leikkaa x-akselin kohdassa $x = -1$ ja kohdassa $x = 1$. Näissä kohdissa kuvaajan pisteen y-koordinaatti on siis 0. Nämä kohdat, joissa funktion arvo on 0, on nimetty funktion nollakohdiksi:

MÄÄRITELMÄ: FUNKTION NOLLAKOHTA

Funktion f *nollakohta* tarkoittaa sellaista muuttujan x arvoa, jolla funktio saa arvon nolla eli $f(x) = 0$.

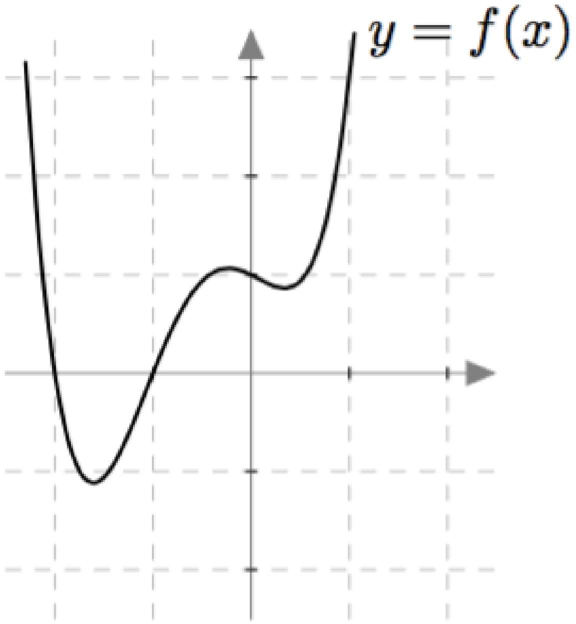
TEHTÄVÄ 4.12: FUNKTION NOLLAKOHTA

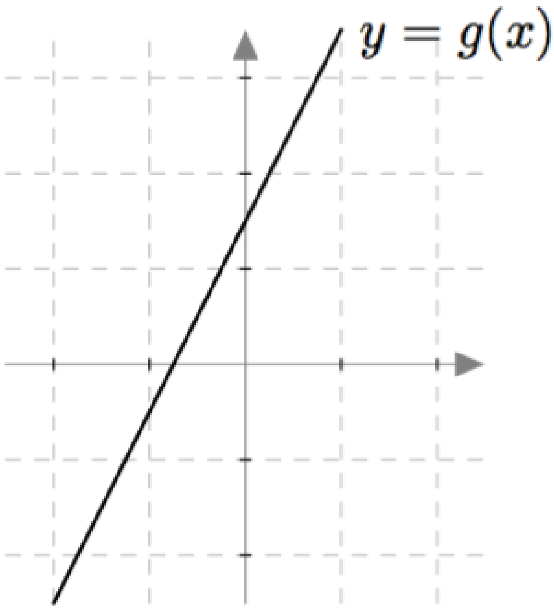
Alla on näkyvissä funktioiden f, g ja h kuvaajat. Millä näistä funktioista

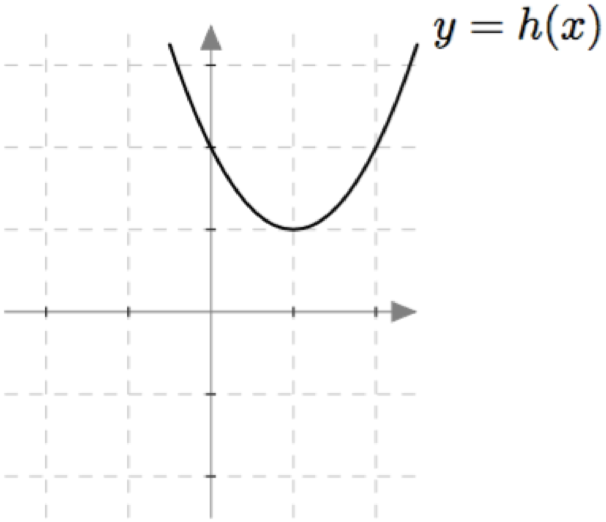
(a) on tasan yksi nollakohta?

(b) on useita nollakohtia?

(c) ei ole yhtään nollakohtaa?







TEHTÄVÄ 4.13: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

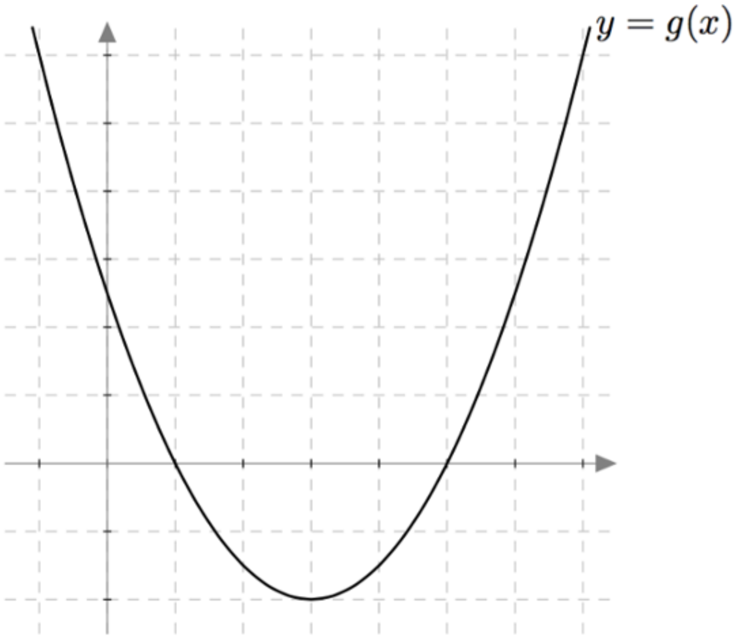
Alla on funktion g kuvaaja. Päättele sen avulla vastaukset seuraaviin kysymyksiin:

(a) Millä muuttujan x arvolla funktio saa arvon -2?

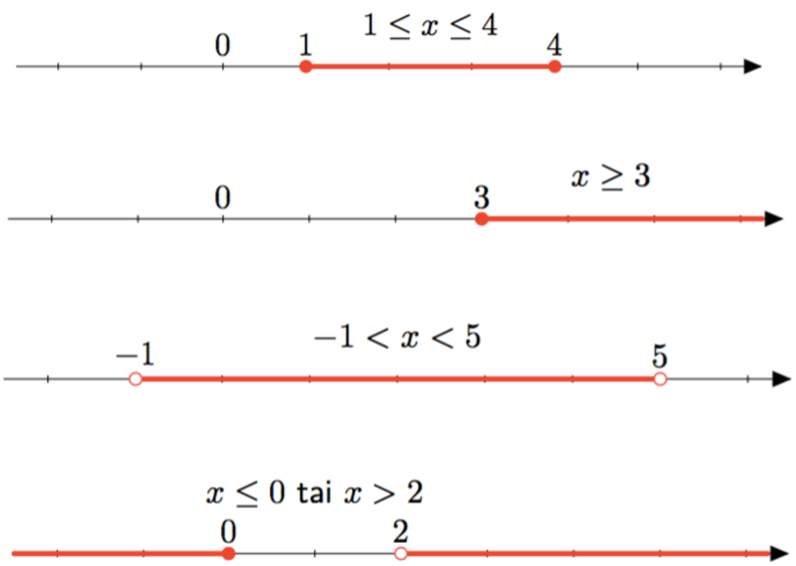
(b) Onko funktiolla yksi tai useampia nollakohtia? Mitä ne ovat?

(c) Millä muuttujan x arvolla $g(x) = 6$?

(d) Millä muuttujan x arvoilla funktio g saa arvon $g(4)$?



Lukusuoran välejä ja niiden yhdistelmiä voidaan ilmaista merkkien $<$ (pienempi kuin), $>$ (suurempi kuin), $\leq$ (pienempi tai yhtä suuri kuin) ja $\geq$ (suurempi tai yhtä suuri kuin) avulla seuraavaan tapaan:



TEHTÄVÄ 4.14: LUKUSUORAN VÄLIT

Havainnollista piirroksella lukusuoran välejä tai niiden yhdistelmiä

(a) $-2 < x \leq 1$

(b) $x < -3$

(c) $x < 2$ tai $x > 4$.

(d) Selitä omin sanoin, miksi ehdossa "$x \leq 0$ ja $x > 3$" ei ole järkeä.

TEHTÄVÄ 4.15: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

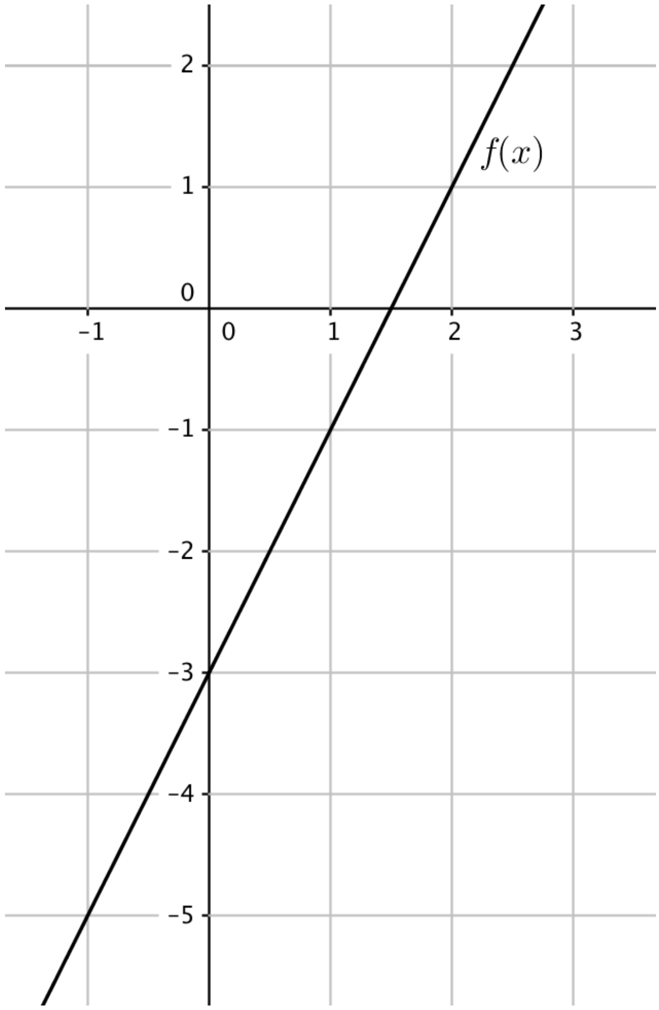
Tarkastele alla olevaa funktion f kuvaajaa. Millä muuttujan x arvoilla

(a) funktio saa arvon nolla, eli $f(x) = 0$

(b) funktion arvot ovat positiivisia eli $f(x) > 0$

(c) funktion arvot negatiivisia eli $f(x) < 0$?

Anna vastaus edellä harjoiteltuja lukusuoran välin merkintöjä käyttäen tai selitä omin sanoin.



TEHTÄVÄ 4.16: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

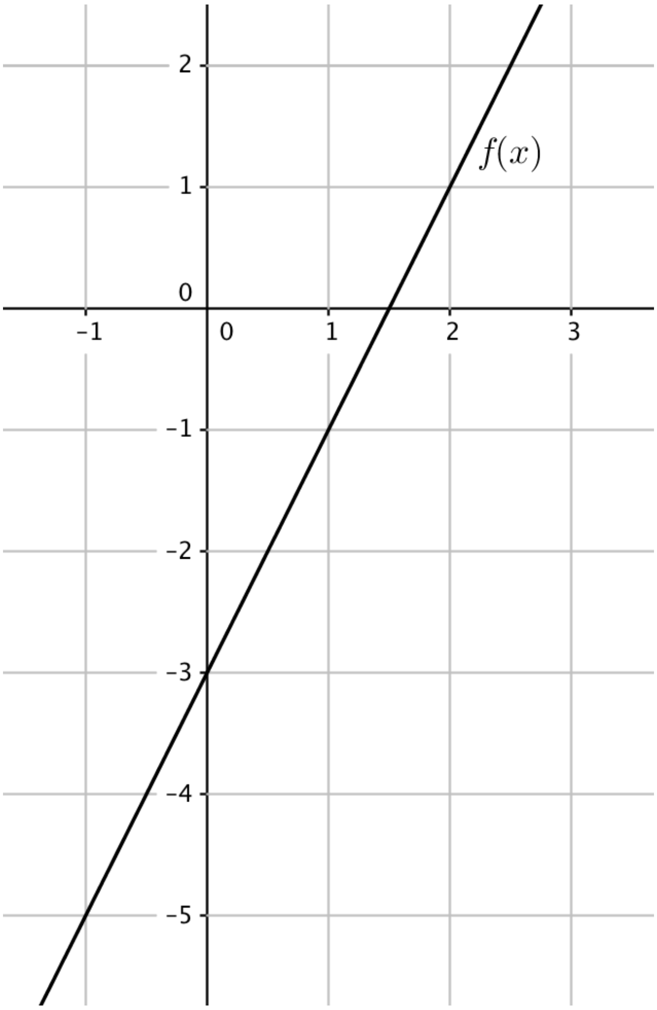
Tarkastele alla olevaa funktion f kuvaajaa. Millaisia arvoja funktio saa eli mitä voit sanoa luvusta $f(x)$, jos

(a) $-1 \leq x \leq 2$

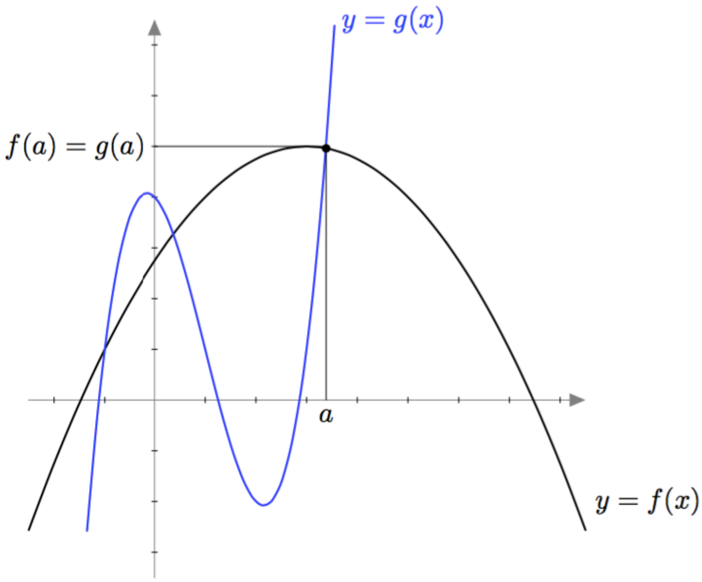
(b) $x > 0$

(c) $x \leq 1$?

Anna vastaus edellä harjoiteltuja lukusuoran välin merkintöjä käyttäen tai selitä omin sanoin.



Funktioiden arvoja voi vertailla piirtämällä niiden kuvaajat samaan koordinaatistoon kuten alla olevassa kuvassa. Siitä nähdään esimerkiksi, että funktiot f ja g saavat saman arvon kohdassa $a \approx 3,4$ ja tämä arvo on $f(a) = g(a) \approx 5$.



TEHTÄVÄ 4.17: FUNKTIOIDEN KUVAAJIEN VERTAILU

Tarkastele edelleen yllä olevaa kuvaa, jossa näkyvät funktioiden f ja g kuvaajat.

(a) Saavatko funktiot f ja g saman arvon jossain muussakin kohdassa kuin kohdassa $x = a$? Missä?

(b) Kumpi funktioista saa suuremman arvon kohdassa $x = 0$?

(c) Kumpi funktioista saa suuremman arvon kohdassa $x = 1$?

(d) Selitä omin sanoin, miten kuvaajista näkyy se, että jollakin muuttujan x arvolla funktion g arvot ovat pienempiä kuin funktion f arvot eli $g(x) < f(x)$.

Seuraavien tehtävien avulla harjoitellaan funktion kuvaajan piirtämistä laskimella.

TEHTÄVÄ 4.18: FUNKTION KUVAAJAN PIIRTÄMINEN LASKIMELLA

Perehdy oman teknisen apuvälineesi käyttöön esimerkiksi opetus.tv:n opetusvideoiden avulla. Ne löytyvät osoitteesta opetus.tv -> työkalut -> valitse oma laskimesi -> funktiot ja kuvaajat. Harjoittele oman laitteesi käyttöä tekemällä seuraavaa:

(a) Piirrä funktion $f(x) = 2x - 1$ kuvaaja.

(b) Määritä kuvaajasta funktion f nollakohta tai nollakohdat.

(c) Määritä laskimen laskinsovelluksen puolella funktion arvo, kun $x = 4$.

(d) Piirrä samaan kuvaan funktion $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ kuvaaja.

(e) Määritä piirtämäsi kuvan avulla ne kohdat, joissa funktiot f ja g saavat saman arvon. Luettele kaikki tällaiset kohdat sekä niitä vastaavat funktioiden arvot.

(f) Määritä laskinsovelluksen avulla avulla ne kohdat, joissa funktiot f ja g saavat saman arvon, eli ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$. Saatko saman tuloksen kuin edellisessä kohdassa?

(g) Määritä funktioiden f ja g leikkauspisteiden y-koordinaatit määrittämällä jommankumman funktion arvo edellisessä kohdassa selvitetyillä muuttujan x arvoilla.

TEHTÄVÄ 4.19: FUNKTION KUVAAJAN PIIRTÄMINEN LASKIMELLA

(a) Piirrä funktion $f(x) = \sqrt{x}$ kuvaaja.

(b) Millaisia arvoja funktio f saa?

(c) Millä muuttujan x arvoilla funktio on määritelty, eli millaisilla luvuilla x funktion kuvaaja on näkyvissä?

ERILAISIA FUNKTIOITA

Funktioita voidaan luokitella eri tavoin. Voidaan esimerkiksi puhua polynomifunktioista, juurifunktioista, murtofunktioista, trigonometrisistä funktioista, eksponentti- ja logaritmifunktioista ja niin edelleen. Tiettyyn luokkaan kuuluvien funktioiden lausekkeet muistuttavat yleensä toisiaan ja niiden kuvaajissa on samoja piirteitä. Tässä kappaleessa tutkitaan kuvaajien avulla erityyppisten funktioiden ominaisuuksia.

Ensimmäiseksi tutkitaan niin sanottujen ensimmäisen asteen polynomifunktioiden ominaisuuksia.

MÄÄRITELMÄ: ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

Funktiota f, joka on muotoa $f(x) = ax + b$, missä $a \neq 0$, sanotaan *ensimmäisen asteen polynomifunktioksi*.

TEHTÄVÄ 4.20: ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

(a) Piirrä laskimellasi samaan kuvaan funktioiden $f(x) = 0,5x + 1$, $g(x) = 2x + 1$ ja $h(x) = -x + 1$ kuvaajat.

(b) Mitä yhteistä näiden funktioiden kuvaajilla on? Entä mitä eroa niillä on?

(c) Kaikki tämän tehtävän funktiot ovat muotoa $x \mapsto ax + 1$ eli ne kertovat muuttujaa x jollakin luvulla a ja lisäävät tulokseen luvun 1. Miten luku 1 näkyy funktioiden kuvaajissa?

(d) Pystytkö päättelemään kuvaajaa piirtämättä, millä korkeudella funktio $k(x) = x + 4$ leikkaa y-akselin?

TEHTÄVÄ 4.21: ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

(a) Piirrä laskimellasi samaan kuvaan funktioiden $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x$ ja $h(x) = 2x + 2$ kuvaajat.

(b) Mitä yhteistä näiden funktioiden kuvaajilla on? Entä mitä eroa niillä on?

(c) Kaikki tämän tehtävän funktiot ovat muotoa $x \mapsto 2x + b$ eli ne kertovat muuttujan x kahdella ja lisäävät tulokseen luvun b. Miten kerroin 2 näkyy funktioiden kuvaajissa?

TEHTÄVÄ 4.22: ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

(a) Piirrä laskimellasi samaan kuvaan funktioiden $f(x) = -2x$ ja $g(x) = 2x$ kuvaajat.

(b) Mitä yhteistä näiden funktioiden kuvaajilla on? Entä mitä eroa niillä on?

(c) Miten voit päätellä kuvaajaa piirtämättä, onko funktion $h(x) = -3x + 4$ kuvaaja nouseva vai laskeva suora?

TEHTÄVÄ 4.23: ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

Selitä omin sanoin, miten voit päätellä ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax + b$ lausekkeesta,

(a) onko funktion kuvaaja nouseva vai laskeva suora

(b) miten jyrkästi kuvaaja nousee tai laskee

(c) missä kohdassa kuvaaja leikkaa y-akselin.

Voit tutkia edellisten tehtävien tuloksia tai piirtää vielä lisää ensimmäisen asteen polynomifunktioiden kuvaajia laskimellasi.

Piirtämällä paljon tietyntyyppisten funktioiden kuvaajia saa käsityksen siitä, miltä niiden kuvaajat yleensä näyttävät. Siitä on hyötyä, jos joutuu luonnostelemaan tai piirtämään tällaisen funktion kuvaajan kynän ja paperin avulla ilman laskinta tai tietokonetta.

TEHTÄVÄ 4.24: KUVAAJAN PIIRTÄMINEN KÄSIN

Tehtävänä on piirtää funktion $f(x) = -x + 3$ kuvaaja ilman teknisiä apuvälineitä välillä $-3 \le x \le 6$.

(a) Määritä jokin kuvaajan piste esimerkiksi laskemalla funktion f arvo jossakin kohdassa välillä $-3 \le x \le 6$ tai muuten päättelemällä (voit hyödyntää edellisten tehtävien havaintoja).

(b) Pystytkö piirtämään kuvaajan a-kohdan tiedon perusteella? Jos et, määritä jokin toinen kuvaajan piste samaan tapaan.

(c) Pystytkö piirtämään kuvaajan a- ja b-kohtien perusteella? Määritä tarvittaessa lisää kuvaajan pisteitä kunnes pystyt piirtämään kuvaajan koko välillä $-3 \le x \le 6$.

Seuraavassa tehtävässä piirretään erilaisten eksponenttifunktioiden kuvaajia. Eksponenttifunktioiden avulla voidaan mallintaa ja analysoida esimerkiksi sähkövirtapiirejä, aineen radioaktiivista hajoamista, kappaleen jäähtymistä, tietynlaisten kemiallisten reaktioiden nopeutta, populaatioiden koon kasvua, tautien leviämistä, pääoman karttumista korkonkorkolaskennassa, pyramidihuijauksia ja niin edelleen.

TEHTÄVÄ 4.25: EKSPONENTTIFUNKTIO

(a) Piirrä laskimellasi samaan kuvaan funktioiden $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ ja $h(x) = 0,5^x$ kuvaajat.

(b) Mitä yhteistä näiden funktioiden kuvaajilla on? Entä mitä eroa niillä on? Tutki erityisesti kohtaa $x = 0$.

(c) Selitä omin sanoin, miten kantaluku a vaikuttaa eksponenttifunktion $F(x) = a^x$ kuvaajan ulkonäköön.

Seuraavassa tehtävässä piirretään erilaisten logaritmifunktioiden kuvaajia. Logaritmifunktioiden avulla voidaan mallintaa äänenvoimakkuutta, maanjäristyksiä, liuoksen happamuutta tai emäksisyyttä ja niin edelleen.

TEHTÄVÄ 4.26: LOGARITMIFUNKTIO

(a) Piirrä laskimellasi samaan kuvaan funktioiden $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = \log_3(x)$ ja $h(x) = \log_{10}(x)$ kuvaajat.

(b) Mitä yhteistä näiden funktioiden kuvaajilla on? Entä mitä eroa niillä on? Tutki erityisesti kohtaa $x = 1$.

TEHTÄVÄ 4.27: LOGARITMIFUNKTIO JA EKSPONENTTIFUNKTIO

(a) Piirrä laskimellasi samaan kuvaan funktioiden $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = 2^x$ ja $h(x) = x$ kuvaajat.

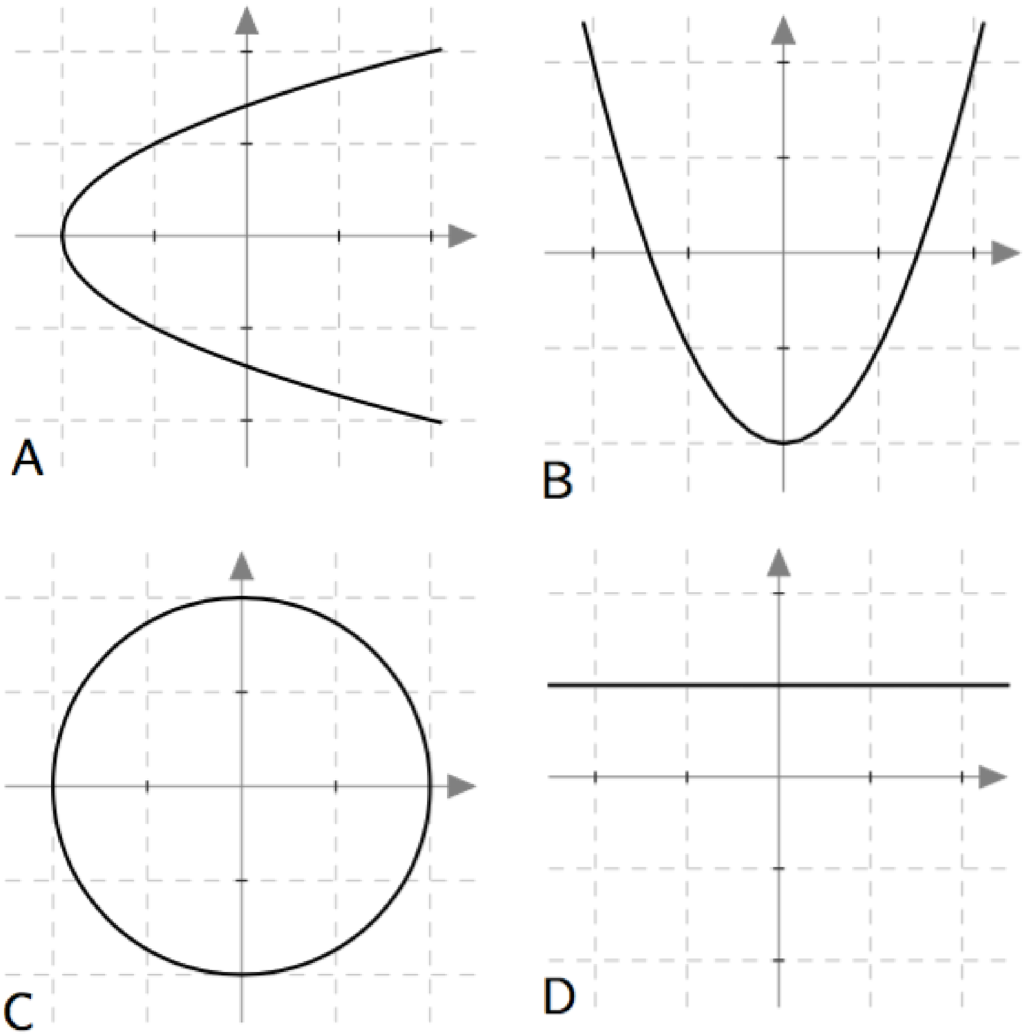
(b) Vertaa logaritmifunktion ja eksponenttifunktion kuvaajien sijaintia suhteessa kuvassa näkyvään suoraan. Mitä havaitset? Miten peili liittyy tähän tilanteeseen?

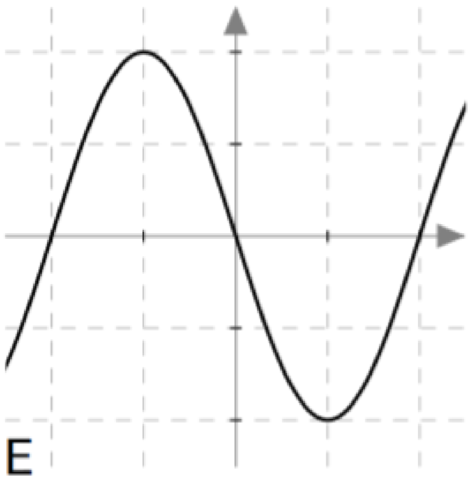
(c) Tee vastaava piirros kuin a-kohdassa mutta vaihda kantaluvuksi luku 3. Havaitsetko saman ilmiön kuin b-kohdassa?

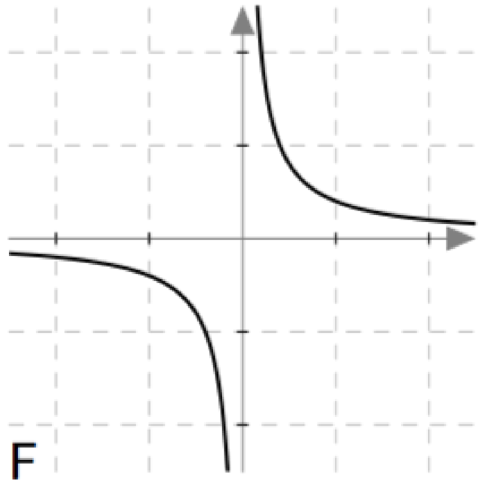
TEHTÄVÄSARJA II

TEHTÄVÄ 4.28: FUNKTION MÄÄRITELMÄ

Palauta mieleesi funktion käsitteen määritelmä ja päättele sen avulla, mitkä alla olevista kuvista voivat esittää jonkin funktion kuvaajaa välillä $-2 \leq x \leq 2$. Perustele jokaisen kuvan kohdalla omin sanoin, onko kysymyksessä funktion kuvaaja vai ei.







VASTAUS

Funktion kuvaajaa välillä $-2 \leq x \leq 2$ voivat esittää vaihtoehdot B, D ja E. Vaihtoehdot A, C, ja F eivät esitä välillä $-2 \leq x \leq 2$ määriteltyä funktiota.

TEHTÄVÄ 4.29: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

Alla on erään funktion f kuvaaja. Päättele sen avulla vastaukset seuraaviin kysymyksiin:

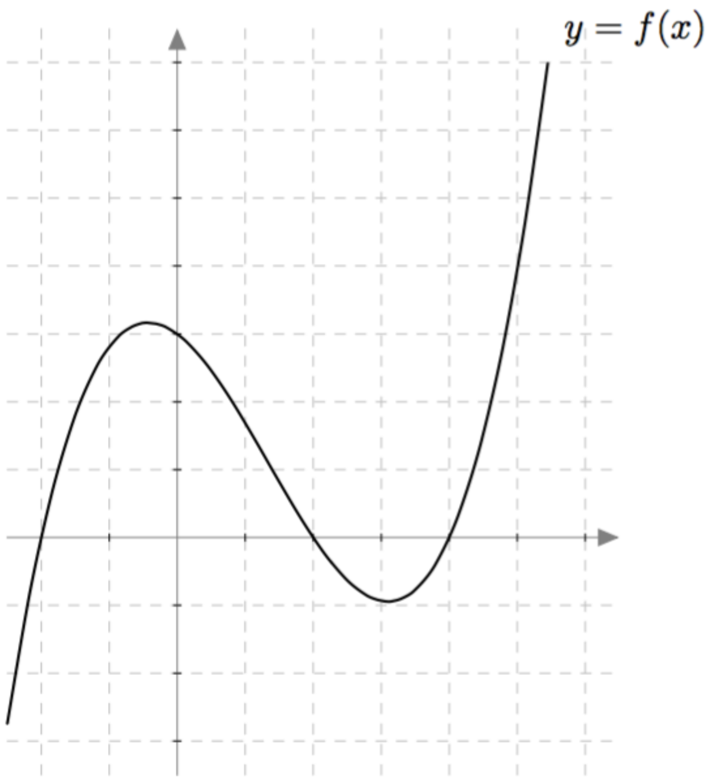
(a) Mikä on funktion f arvo kohdassa $x = 5$?

(b) Mitä on $f(0)$?

(c) Onko funktiolla f nollakohta tai nollakohtia? Jos on, mitä ne ovat?

(d) Millä muuttujan x arvoilla funktion f arvot ovat positiiviset?

(e) Millä muuttujan x arvoilla funktion f arvot ovat negatiiviset?



VASTAUS

(a) 4

(b) $f(0) = 3$

(c) Nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 2$ ja $x = 4$.

(d) $-2 < x < 2$ tai $x > 4$

(e) $x < -2$ ja $2 < x < 4$

TEHTÄVÄ 4.30: FUNKTION ARVOT JA FUNKTION NOLLAKOHDAT

Tutkitaan funktiota f, jolle $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$.

(a) Määritä laskemalla funktion arvot $f(2)$ ja $f(6)$.

(b) Päättele funktion f lausekkeesta, mikä on sen määrittelyehto eli millä muuttujan arvoilla funktion arvon laskeminen on mahdollista.

(c) Piirrä funktion f kuvaaja laskimella ja päättele seuraavien kohtien vastaukset kuvaajan avulla.

(d) Mikä on funktion f arvo kohdassa nolla? Saako funktio tämän arvon jossain muussakin kohdassa?

(e) Onko funktiolla f nollakohtia? Jos on, mitä ne ovat?

VASTAUS

(a) $-\frac{3}{2}$

(b) $x \neq -2$

(c)

(d) $f(0) = -2$, myös kohdassa $x = 1$

(e) Kaksi nollakohtaa: $x = -1$ ja $x = 4$.

TEHTÄVÄ 4.31: FUNKTION ARVOT JA FUNKTION KUVAAJA

Piirrä funktion $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ kuvaaja laskimella välillä $-3 \leq x \leq 7$. Päättele kuvaajan avulla, missä kohdassa funktio g saa arvon

(a) 2

(b) 4

(c) 6.

(d) Mikä on funktion g suurin arvo? Millä muuttujan x arvolla funktio saa tämän arvon?

VASTAUS

(a) $x = 0$ ja $x = 4$

(b) $x = 2$

(c) Ei millään

(d) Suurin arvo on 4, kohdassa $x = 2$.

TEHTÄVÄ 4.32: FUNKTION ARVOT JA FUNKTION KUVAAJA

Tutkitaan funktiota f, jolle $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

(a) Laske funktion f arvo kohdassa $x = -2$.

(b) Päättele edellisen kohdan tuloksen avulla, onko piste $(-2, 5)$ funktion f kuvaajalla, sen yläpuolella vai sen alapuolella.

(c) Piirrä funktion f kuvaaja laskimella ja tarkista sen avulla, päädyitkö edellisessä kohdassa oikeaan johtopäätökseen.

VASTAUS

(a) $f(-2) = 6$

(b) Kuvaajan alapuolella.

TEHTÄVÄ 4.33: FUNKTION MÄÄRITTELYJOUKKO JA FUNKTION KUVAAJA

Tutkitaan funktiota h, jolle $h(x) = 2x + \frac{4}{1-x}$.

(a) Päättele funktion h lausekkeesta, mikä on sen määrittelyehto eli millä muuttujan arvoilla funktion arvon laskeminen on mahdollista.

(b) Piirrä funktion h kuvaaja laskimella.

(c) Määritä kuvaajan avulla funktion h nollakohdat.

(d) Määritä kuvaajan avulla funktion h arvo kohdassa nolla. Saako funktio h tämän arvon jossain toisessakin kohdassa? Missä?

VASTAUS

(a) $x \neq 1$

(b)

(c) Kaksi nollakohtaa: $x = -1$ ja $x = 2$.

(d) $f(0) = 4$; funktio saa saman arvon myös kohdassa $x = 3$.

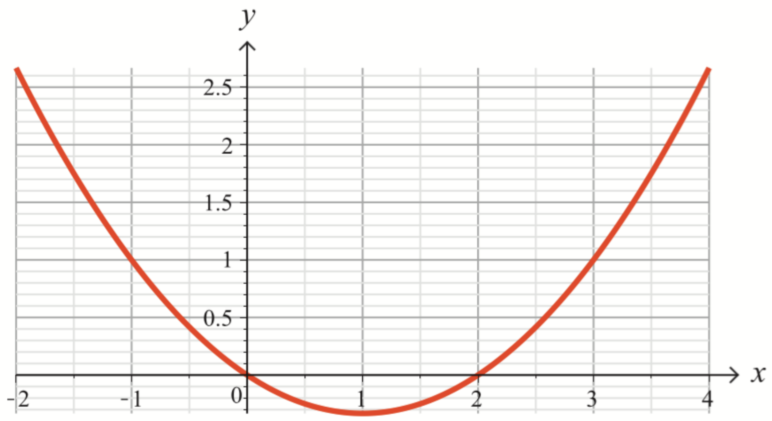
TEHTÄVÄ 4.34: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

Oheisessa kuviossa on erään funktion $f(x)$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla ne muuttujan x arvot, joille $-2 \leq x \leq 4$ ja

(a) $f(x) = 1$

(b) $f(x) \leq 0$.

[Lyhyt S2015/3ab]



VASTAUS

(a) Kaksi kohtaa: $x = -1$ ja $x = 3$

(b) $0 \leq x \leq 2$

TEHTÄVÄ 4.35: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

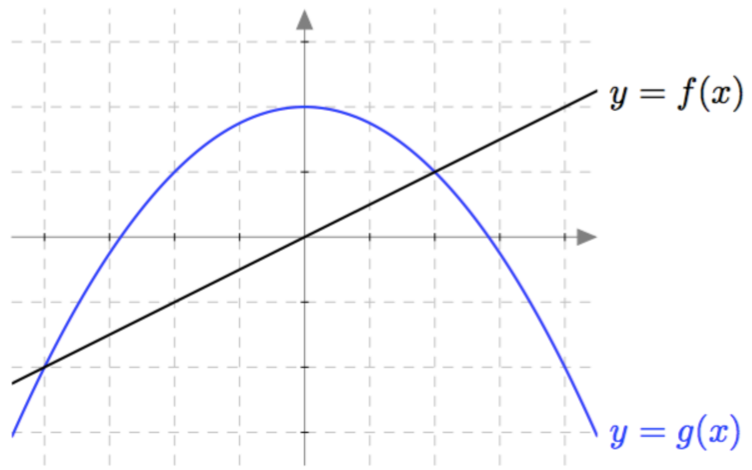
Alla olevaan kuvaan on piirretty funktioiden $f(x) = 0,5x$ ja $g = -0,25x^2 + 2$ kuvaajat. Päättele niiden avulla vastaukset seuraaviin kysymyksiin:

(a) Missä kohdissa funktiot f ja g saavat saman arvon?

(b) Mitkä ovat yhtälön $0,5x = -0,25x^2 + 2$ ratkaisut?

(c) Millä muuttujan arvoilla funktio g saa suurempia arvoja kuin funktio f?

(d) Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $-0,25x^2 + 2 > 0,5x$?



VASTAUS

(a) Kaksi kohtaa: $x = -4$ ja $x = 2$

(b) $x = -4$ tai $x = 2$

(c) $-4 < x < 2$

(d) $-4 < x < 2$

TEHTÄVÄ 4.36: FUNKTION KUVAAJAN TULKINTA

Tutkitaan yhtälöä $0,25x - 1,5 = 3 - 2^x$.

(a) Muodosta lausekkeet funktioille f ja g niin, että saat kirjoitettua tutkittavan yhtälön muodossa $f(x) = g(x)$.

(b) Piirrä funktioiden f ja g kuvaajat samaan koordinaatistoon laskimella.

(c) Päättele kuvaajan avulla, onko yhtälöllä $0,25x - 1,5 = 3 - 2^x$ ratkaisua. Jos ratkaisuja on olemassa, mitä ne ovat?

VASTAUS

(a) Esimerkiksi $f(x) = 0,25x - 1,5$ ja $g(x) = 3 - 2^x$

(b)

(c) $x = 2$

TEHTÄVÄ 4.37: FUNKTIO

Mittausten perusteella erään bussilinjan matka-ajan riippuvuutta ruuhkasta kuvaa funktio $f(x) = 0{,}0005x^2 + 0,01x + 18$, missä x on reitin vilkkaimpaan risteykseen saapuvien ajoneuvojen määrä yhden minuutin aikana. (Funktion arvo ilmaisee matka-ajan minuutteina.)

(a) Piirrä funktion f kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 200$ laskimellasi tai esimerkiksi Wolfram|Alphalla. Wolfram|Alphalla piirtäminen onnistuu komennolla *plot $f(x) = 0{,}0005x^2 + 0,01x + 18$, x from 0 to 200*.

(b) Päättele kuvaajasta, kuinka monta autoa risteykseen saa enintään saapua, jotta matka-aika olisi alle 30 minuuttia. Tarkenna kuvaa tarvittaessa pienentämällä tarkasteluväliä.

(c) Määritä laskemalla, miten paljon matka-aika pitenee, jos risteykseen minuutin aikana saapuvien autojen määrä kasvaa viidestäkymmenestä sataan.

VASTAUS

(a)

(b) Noin 145 autoa.

(c) 4 min 15 s.

TEHTÄVÄ 4.38: FUNKTIO

Kun seurattiin paistolämpömittarin lukemia, havaittiin, että paistin sisälämpötila nousi koko ajan tasaisesti siten, että neljässä minuutissa lämpötila kohosi 2 °C. Kun paisti laitettiin uuniin, lämpömittarin lukema oli 35 °C.

(a) Muodosta lauseke funktiolle $f(t)$, joka kuvaa paistin sisälämpötilaa ajan t funktiona.

(b) Piirrä funktion f kuvaaja välillä $0 \leq t \leq 80$ laskimellasi tai esimerkiksi Wolfram|Alphalla.

(c) Keittokirjan mukaan paisti on kypsä, kun sen sisälämpötilan on 60 °C. Päättele piirtämäsi kuvaajan avulla, kuinka kauan paistin kypsennys kestää. (Pienennä väliä $0 \leq t \leq 80$ tarvittaessa saadaksesi tarkemman tuloksen.)

(d) Jos paisti laitettiin uuniin klo 16, mihin aikaan se on valmis?

VASTAUS

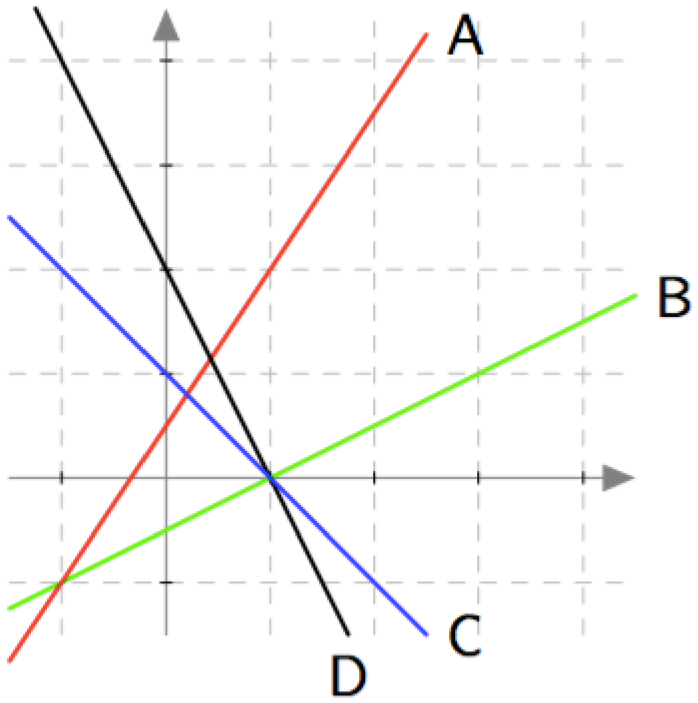
(a) $f(t) = 35 + 0,5t$

(b)

(c) 50 min

(d) 16:50

TEHTÄVÄ 4.39: ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO



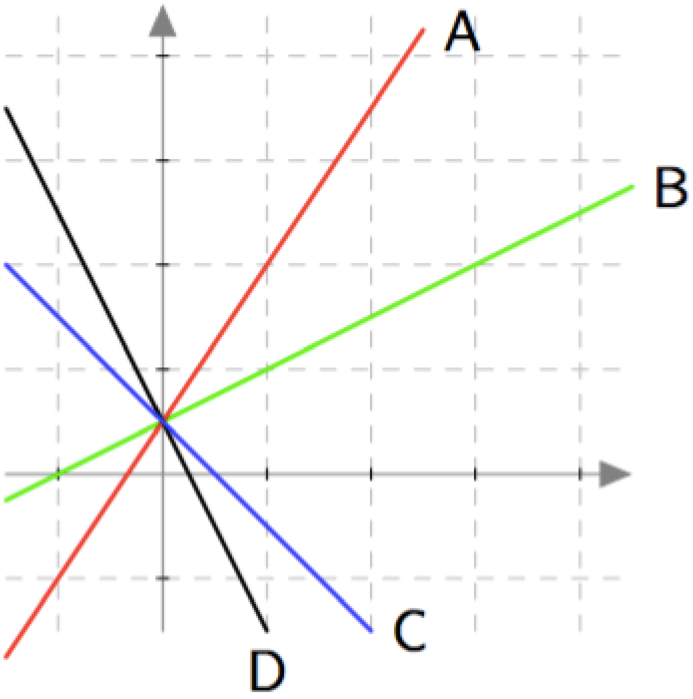
Yllä olevassa kuvassa on joidenkin ensimmäisen asteen polynomifunktioiden kuvaajia. Täydennä alla oleva taulukko liittämällä kuhunkin funktioon sen kuvaaja.

$f(x) = 0,5x - 0,5$	
$g(x) = 1,5x + 0,5$	
$h(x) = -2x + 2$	
$k(x) = -x + 1$	

VASTAUS

$f(x) = 0,5x - 0,5$	B
$g(x) = 1,5x + 0,5$	A
$h(x) = -2x + 2$	D
$k(x) = -x + 1$	C

TEHTÄVÄ 4.40: ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO



Yllä olevassa kuvassa on joidenkin ensimmäisen asteen polynomifunktioiden kuvaajia. Täydennä alla oleva taulukko liittämällä kuhunkin funktioon sen kuvaaja.

$f(x) = -x + 0,5$	
$g(x) = -2x + 0,5$	
$h(x) = 0,5x + 0,5$	
$k(x) = 1,5x + 0,5$	

VASTAUS

$f(x) = 0,5x - 0,5$	C
$g(x) = 1,5x + 0,5$	D
$h(x) = -2x + 2$	B
$k(x) = -x + 1$	A

TEHTÄVÄSARJA III

TEHTÄVÄ 4.41:

Kahden sähköyhtiön A ja B hinnoittelu perustuu kiinteään kuukausittaiseen perusmaksuun, johon lisätään sähkön kulutuksen mukainen lisämaksu. Yhtiöiden tarjoamat hinnat selviävät alla olevasta taulukosta.

	4,02	6,62
	3,75	7,99

(a) Muodosta lausekkeet $a(x)$ ja $b(x)$ kummankin yhtiön tarjoaman sähkön kokonaishinnalle, kun sähköä kuluu x kWh ja aikavälinä on yksi kuukausi.

(b) Kuinka suuri täytyisi sähkönkulutuksen olla kuukausittain, jotta kokonaishinnat olisivat samat?

(c) Kuinka suuri on sähkön kokonaishintojen välinen ero vuoden aikana, jos sähköä kuluu 2 000 kWh vuodessa?

[Lyhyt S2015/6]

VASTAUS

(a) $a(x) = 0{,}0662x + 4,02$ ja $b(x) = 0{,}0799x + 3,75$

(b)

(c) 50 min

(d) 16:50

TEHTÄVÄ 4.42:

Ravintoliuoksessa kasvatettavan bakteeripopulaation yksilömäärä $N(t)$ kasvaa eksponentiaalisen mallin $N(t) = 1000 \cdot 1,25^t$ mukaisesti, kun aika t ilmoitetaan tunteina.

(a) Mikä on populaation koko 24 tunnin kuluttua? Anna vastaus tuhannen bakteerin tarkkuudella.

(b) Kuinka monta prosenttia populaatio kasvaa jokaisen tunnin aikana?

(c) Kuinka monta tuntia kestää, että populaation koko ylittää miljoonan? Vihje: hyödynnä laskinta yhtälön ratkaisemisessa.

[Lyhyt K2015/8]

VASTAUS

(a) Noin $212\,000$ yksilöä

(b) 25 %

(c) 31 tuntia

TEHTÄVÄ 4.43:

Erästä tuotetta myydään päivittäin 55 kappaletta, kun sen hinta on 35 euroa. Hinnan laskemisen on todettu vaikuttavan päivämyyntiin niin, että yhden euron alennus lisää aina menekkiä viidellä kappaleella.

(a) Mikä on päivittäisen myynnin kokonaisarvo, kun yhden tuotteen hinta on 35 euroa?

(b) Jos hintaa lasketaan x euroa, kuinka monta kappaletta tuotetta myydään?

(c) Muodosta lauseke funktiolle $f(x)$, joka ilmaisee myynnin kokonaisarvon tilanteessa, jossa hintaa on laskettu x euroa.

(d) Millä muuttujan x arvoilla funktio f on määritelty?

(e) Piirrä funktion f kuvaaja välillä $5 \leq x \leq 20$ laskimellasi tai esimerkiksi Wolfram|Alphalla. Wolfram|Alphalla piirtäminen onnistuu esimerkiksi komennolla *plot* $f(x) = x + 1$, x *from 5 to 20* (muuta funktion lauseke oikeaksi).

(f) Päättele kuvaajan avulla, kuinka paljon hintaa pitää alentaa, jotta päivittäisen myynnin kokonaisarvo on mahdollisimman suuri.

(g) Mikä tuotteen hinnaksi kannattaa valita, jos haluaa mahdollisimman suuren myynnin kokonaisarvon? Mikä tämä kokonaisarvo on?

VASTAUS

(a) 1925 euroa

(b) $55 + 5x$

(c) $f(x) = (55 + 5x)(35 - x)$

(d) $0 \leq x \leq 35$

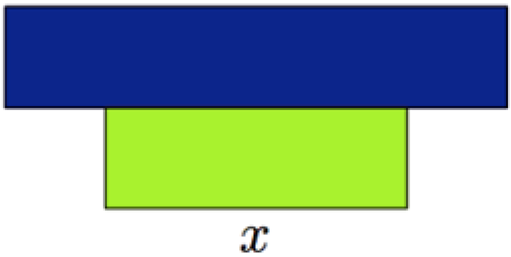
(e)

(f) 12 euroa

(g) 23 euroa, 2645 euroa.

TEHTÄVÄ 4.44:

Joen rannalla oleva suorakulmion muotoinen alue aidataan kolmelta sivulta 100 m pitkällä köydellä.



(a) Jos rannan suuntaisen sivun pituus on x, mikä on kahden muun sivun pituus?

(b) Muodosta lauseke funktiolle $A(x)$, joka ilmaisee aidatun alueen pinta-alan rannan suuntaisen sivun pituuden x funktiona.

(c) Millä muuttujan x arvoilla funktio $A(x)$ on määritelty?

(d) Piirrä funktion A kuvaaja laskimellasi tai esimerkiksi Wolfram|Alphalla.

(e) Päättele kuvaajan avulla, kuinka pitkäksi rannan suuntainen sivu pitää valita, jotta aidatun alueen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri.

(f) Mikä on aidatun alueen suurin mahdollinen pinta-ala?

VASTAUS

(a) $\frac{100-x}{2}$

(b) $A(x) = \frac{100x - x^2}{2}$

(c) $0 < x < 100$

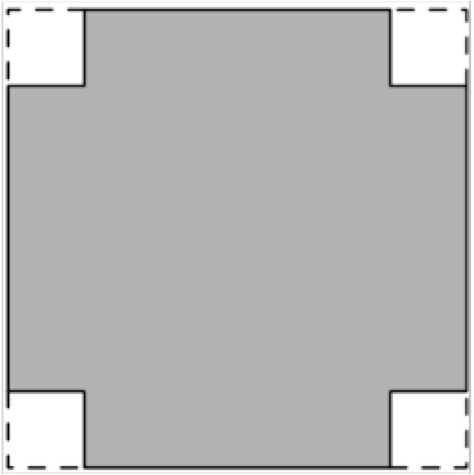
(d)

(e) 50 m

(f) 1250 m^2

TEHTÄVÄ 4.45:

Neliön muotoisen levyn sivun pituus on 300 mm. Levystä leikataa kuvion mukaisesti nurkat pois ja levy taitetaan laatikoksi, jossa ei ole kantta.



(a) Askartele paperista malli laatikolle.

(b) Esitä syntyneen laatikon tilavuus V pois leikatun nurkkapalan sivun pituuden h funktiona eli määritä $V(h)$.

(c) Millä muuttujan h arvoilla funktio $V(h)$ on määritelty?

(d) Piirrä funktion $V(h)$ kuvaaja laskimella tai esimerkiksi Wolfram|Alphalla.

(e) Päättele kuvaajan avulla, kuinka suuri pituuden h on oltava, jotta saadaan tilavuudeltaan mahdollisimman suuri laatikko.

(f) Laske funktion $V(h)$ avulla, mikä suurin mahdollinen tilavuus on. Anna vastaus kuutiodesimetreinä (dm^3) eli litroina (l). Selvitä tarvittaessa netistä, miten tilavuuden yksiköt mm^3, cm^3 ja dm^3 liittyvät toisiinsa.

VASTAUS

(a)

(b) $V(h) = h \cdot (300 - h)^2$

(c) $0 < h < 150$

(d)

(e) 100 mm

(f) 4 dm^3 eli 4 litraa.

TEHTÄVÄ 4.46: FUNKTION MÄÄRITTELYEHTO

Keksi esimerkki funktiosta, jonka määrittelyehto on

(a) $x \neq 1$

(b) $x \neq -9$

(c) $x \neq 2$ ja $x \neq 5$.

ITSEARVIOINTITEHTÄVÄT

Varmista, että olet oppinut tämän luvun keskeiset asiat tekemällä itsearviointitesti opetus.tv:n polku-palvelussa. Samalla harjoittelet omien ratkaisujesi pisteyttämistä pisteytysohjeiden avulla.

Prosenttilaskenta

LUVUN TAVOITTEET

Tämän luvun tavoitteena on, että osaat ratkaista prosenttilaskentaan liittyviä ongelmia. Osaat

- laskea, kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b
- laskea, kuinka paljon on p prosenttia luvusta b
- laskea, mistä luvusta luku a on p prosenttia
- laskea, kuinka monta prosenttia luku a on suurempi tai pienempi kuin luku b
- laskea muutosprosentin
- laskea, mikä on uusi arvo, jos muutosprosentti ja alkuperäinen arvo tunnetaan
- käyttää kirjainlausekkeita prosenttilaskentaan liittyvissä tehtävissä
- käyttää prosenttiyksikköä prosentteina ilmoitettujen lukujen vertaamiseen.

PROSENTTIOSUUS

Suhteellisten osuuksien ilmaisemiseen käytetään usein prosentteja (kuvankaappauksia Yle Uutisten sivuilta):

Kotimaa 7.7.2015 klo 18:53 | päivitetty 7.7.2015 klo 19:25

Kovapalkkaisin 11 prosenttia maksoi 45 prosenttia veroista – pienituloisin 44 prosenttia alle 8 prosenttia

Ulkomaat 17.7.2016 klo 9:34

Bangladesh toteutti valtavan tavoitteen: enää prosentti väestöstä ilman käymälää

Brexit 23.6.2016 klo 14:33 | päivitetty 23.6.2016 klo 14:59

Toinen Brexit-mittaus: 55 prosenttia briteistä jäisi EU:hun

Aloitetaan määrittelemällä, mitä prosentilla tarkoitetaan:

MÄÄRITELMÄ: PROSENTTI

Prosentti on yksi sadasosa:

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Esimerkiksi $0,04 = 4\ \%$, koska kumpikin merkintä tarkoittaa neljää sadasosaa eri tavoilla kirjoitettuna. Samaan tapaan $0{,}597 = 59,7\ \%$.

TEHTÄVÄ 5.1: PROSENTTI

Ilmoita seuraavat luvut prosenttimerkkiä (%) käyttäen:

(a) $\frac{35}{100}$

(b) $\frac{1}{5}$

(c) $0,56$

(d) $1,28$.

TEHTÄVÄ 5.2: PROSENTTI

Ilmoita seuraavat prosentit desimaalilukumuodossa ilman prosenttimerkkiä:

(a) $50\ \%$

(b) $8,3\ \%$

(c) $24\ \%$

(d) $160\ \%$

(e) $230\ \%$.

Kun halutaan tietää, kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b, muodostetaan suhde

$$\frac{a}{b}$$

ja ilmaistaan se sadasosina eli prosentteina. Esimerkiksi suhteesta

$$\frac{7}{13} = 0{,}5384615\ldots$$

nähdään, että luku 7 on noin $53,8\ \%$ luvusta 13.

TEHTÄVÄ 5.3: PROSENTTIOSUUS

Kuinka monta prosenttia

(a) luku 35 on luvusta 118?

(b) luku 2 on luvusta 360?

(c) luku 20 on luvusta 18?

(d) luku 45 on luvusta 13?

Milloin vastaus on yli $100\ \%$? Selitä omin sanoin.

TEHTÄVÄ 5.4: PROSENTTIOSUUS

Antin bruttopalkka oli 936,25 euroa. Tästä pidätettiin veroa ja muita maksuja yhteensä 232,67 euroa. Tehtävänä on laskea, kuinka monta prosenttia Antin bruttopalkasta meni veroihin ja muihin maksuihin.

(a) Arvioi tuloksen suuruusluokkaa päässäsi. Onko se yli vai alle 50 %? Entä yli vai alle 10 %? Entä yli vai alle 20 %?

(b) Laske, kuinka monta prosenttia bruttopalkasta meni veroihin ja muihin maksuihin.

(c) Havainnollista tilannetta piirroksella, josta näkyvät bruttopalkka sekä verot ja muut maksut.

TEHTAVA 5.5: PROSENTTIOSUUS

Yksiön vuokra oli 480 euroa. Vuoden lopussa sitä korotettiin 20 euroa. Tehtävänä on selvittää, kuinka monta prosenttia alkuperäisestä vuokrasta vuokrankorotus oli.

(a) Arvioi tuloksen suuruusluokkaa päässäsi. Onko se yli vai alle 10 %? Entä yli vai alle 5 %? Entä yli vai alle 1 %?

(b) Kuinka monta prosenttia alkuperäisestä vuokrasta vuokrankorotus oli?

(c) Havainnollista tilannetta piirroksella, josta näkyvät alkuperäinen vuokra ja vuokrankorotus.

TEHTÄVÄ 5.6: PROSENTTIOSUUS

Säilykepurkin sisältö painaa 730 g ja siitä kurkkua on 380 g. Tehtävänä on laskea, kuinka monta prosenttia sisällöstä on kurkkua.

(a) Arvioi tuloksen suuruusluokkaa päässäsi. Onko se yli vai alle 10 %? Entä yli vai alle 50 %? Entä yli vai alle 60 %?

(b) Kuinka monta prosenttia sisällöstä on kurkkua?

(c) Havainnollista tilannetta piirroksella, josta näkyvät purkin sisällön ja kurkun määrät.

Joissakin tilanteissa tiedetään prosenttiosuus ja halutaan laskea sitä vastaava määrä. Toisin sanottuna halutaan laskea, kuinka paljon on p prosenttia luvusta b. Tällöin prosenttiosuus ilmaistaan desimaalimuodossa ilman prosenttimerkkiä. Sitä vastaava osuus saadaan kertolaskulla. Esimerkiksi jos halutaan tietää, kuinka paljon on $32\ \%$ luvusta 478, lasketaan

$$0,32 \cdot 478 = 152,96.$$

Siis $32\ \%$ luvusta 478 on $152,96$.

TEHTÄVÄ 5.7: PROSENTTIOSUUTTA VASTAAVA MÄÄRÄ

Tehtävänä on laskea, kuinka paljon on 30 prosenttia luvusta 8.

(a) Arvioi vastauksen suuruusluokkaa. Onko se pienempi vai suurempi kuin 8? Entä onko se pienempi vai suurempi kuin 4? Entä pienempi vai suurempi kuin 2?

(b) Ilmaise prosentit desimaalilukumuodossa ilman prosenttimerkkiä ja kerro saadulla desimaaliluvulla luku 8.

(c) Tarkista tuloksesi laskemalla, kuinka monta prosenttia se on luvusta 8.

TEHTÄVÄ 5.8: PROSENTTIOSUUTTA VASTAAVA MÄÄRÄ

Arvioi tuloksen suuruusluokkaa esimerkiksi pyöristämällä lukuja sopivasti. Kirjaa arviosi muistiin. Laske sen jälkeen tulos ja anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella. Missä kohdassa arviosi osui lähimmäs oikeaa tulosta?

(a) Kuinka paljon on $25\ \%$ luvusta 12?

(b) Kuinka paljon on $13\ \%$ luvusta 67?

(c) Kuinka paljon on $75\ \%$ luvusta π?

(d) Kuinka paljon on $150\ \%$ luvusta 20?

Prosenttiosuutta vastaavan määrän laskemista voi ajatella myös seuraavasti: Jos halutaan tietää, kuinka paljon on $32\ \%$ luvusta 478, voidaan muodostaa yhtälö

$$\frac{a}{478} = 0,32.$$

Tässä siis kokonaismäärä $b = 478$ ja prosenttiosuus $r = 0,32$. Prosenttiosuutta vastaava määrä a saadaan tästä kertolaskulla kuten jo edellä todettiin:

$$a = 0,32 \cdot 478 = 152,96.$$

TEHTÄVÄ 5.9: PROSENTTIOSUUTTA VASTAAVA MÄÄRÄ

Antin bruttopalkka oli 936,25 euroa. Tästä pidätettiin veroa $18\ \%$.

(a) Kuinka paljon Antti maksoi veroa palkastaan?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella, josta näkyvät bruttopalkka ja veron osuus.

TEHTÄVÄ 5.10: PROSENTTIOSUUTTA VASTAAVA MÄÄRÄ

Yksiön vuokra oli 480 euroa. Vesimaksun osuus oli siitä $3,75\ \%$.

(a) Mikä oli vesimaksun suuruus?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella, josta näkyvät vuokra ja vesimaksu.

TEHTÄVÄ 5.11: PROSENTTIOSUUTTA VASTAAVA MÄÄRÄ

Säilykepurkin sisältö painaa 730 g ja siitä hiilihydraattia on $22\ \%$.

(a) Kuinka paljon hiilihydraattia yhdessä säilykepurkissa on?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella, josta näkyvät purkin sisältö ja hiilihydraatin määrä.

Joskus tiedetään prosenttiosuus ja sitä vastaava määrä, mutta ei kokonaismäärää, johon verrataan. Tällöin kysymys on, mistä luvusta luku a on p prosenttia. Esimerkiksi halutaan selvittää, mistä luvusta luku 264 on 32 prosenttia. Tätä tilannetta vastaa yhtälö

$$\frac{264}{b} = 0,32.$$

Tässä siis prosenttiosuutta vastaava määrä $a = 264$ ja prosenttiosuus $r = 0,32$. Jos yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla b, se voidaan kirjoittaa muodossa

$$0,32b = 264.$$

Kokonaismäärä b saadaan tästä jakolaskulla:

$$b = \frac{264}{0,32} = 825.$$

Siis luku 264 on $32\ \%$ luvusta 825.

TEHTÄVÄ 5.12: KOKONAISMÄÄRÄ

Tehtävänä on laskea, mistä luvusta 15 prosenttia on 10.

(a) Arvioi vastauksen suuruusluokkaa. Onko se pienempi vai suurempi kuin 10? Entä onko se pienempi vai suurempi kuin 20? Entä pienempi vai suurempi kuin 100?

(b) Merkitse kokonaismäärää jollakin kirjaimella ja muodosta yhtälö, joka yhdistää toisiinsa kokonaismäärän, prosenttiosuuden ja sitä vastaavan määrän.

(c) Laske kysytty kokonaismäärä. Anna tulos yhden desimaalin tarkkuudella.

(d) Tarkista tuloksesi laskemalla, kuinka monta prosenttia 10 on saamastasi tuloksesta.

TEHTÄVÄ 5.13: KOKONAISMÄÄRÄ

Arvioi tuloksen suuruusluokkaa esimerkiksi pyöristämällä lukuja sopivasti. Kirjaa arviosi muistiin. Laske sen jälkeen tulos ja anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella. Missä kohdassa arviosi osui lähimmäs oikeaa tulosta?

(a) Mistä luvusta $25\ \%$ on 100?

(b) Mistä luvusta $10\ \%$ on 7?

(c) Mistä luvusta $51\ \%$ on 64?

(d) Mistä luvusta $150\ \%$ on 35?

TEHTÄVÄ 5.14: KOKONAISMÄÄRÄ

Annan veroprosentti oli 21 ja hän maksoi veroa $465,36$ euroa.

(a) Mikä oli Annan bruttopalkka?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella.

TEHTÄVÄ 5.15: KOKONAISMÄÄRÄ

Emil sai ilmoituksen, että hänen vuokraansa korotetaan seuraavan kuun alussa $1,5\ \%$ ja laski, että korotus on $9,75$ euroa.

(a) Mikä oli Emilin vuokra ennen korotusta?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella.

TEHTÄVÄ 5.16: KOKONAISMÄÄRÄ

Eräälle kurssille ilmoittautuneista keskimäärin noin 47 % suorittaa kurssin loppuun asti. Tänä vuonna kurssin suoritti 99 henkeä.

(a) Kuinka monta ilmoittautunutta oli alunperin?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella.

PROSENTIT JA VERTAILU

Prosentteja voidaan käyttää määrien vertailuun. Esimerkiksi, jos halutaan tietää, kuinka monta prosenttia luku 365 on suurempi kuin luku 310, voidaan laskea näiden lukujen suhde:

$$\frac{365}{310} = 1{,}177419\ldots$$

Tästä nähdään, että luku 365 on noin $117{,}7\ \%$ luvusta 310, joten luku 365 on noin $17{,}7\ \%$ suurempi kuin luku 310.

Toinen tapa saman tuloksen saamiseen on laskea ensin vertailtavien lukujen erotus:

$$365 - 310 = 55.$$

Sen jälkeen lasketaan, kuinka monta prosenttia erotus on siitä luvusta, johon verrataan:

$$\frac{55}{310} = 0{,}177419\ldots$$

Tästä voidaan päätellä, että luku 365 on noin $17{,}7\ \%$ suurempi kuin luku 310.

Huomaa, että vertailussa jakajana on aina se luku, johon verrataan. Esimerkiksi edellä kysymys oli, kuinka monta prosenttia luku 365 on suurempi , minkä vuoksi jakajana käytettiin lukua 310.

TEHTÄVÄ 5.17: VERTAILUPROSENTTI

Emmi sai kesätöistään palkkaa 1 150 euroa ja Iida sai 1 225 euroa.

(a) Kuinka monta prosenttia enemmän palkkaa Iida sai Emmiin verrattuna? Valitse edellä havainnollistetuista ratkaisutavoista se, joka tuntuu sinusta selkeämmältä ja ratkaise tehtävä sitä käyttäen.

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella.

TEHTÄVÄ 5.18: VERTAILUPROSENTTI

Henrik juoksi kesäloman aikana 325 km ja Leo juoksi 303 km.

(a) Kuinka monta prosenttia pidemmän matkan Henrik juoksi kuin Leo?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella.

Jos halutaan tietää, kuinka monta prosenttia jokin luku on pienempi kuin jokin toinen luku, voidaan laskea samaan tapaan kuin edellä. Esimerkiksi, jos halutaan tietää, kuinka monta prosenttia luku 310 on pienempi kuin luku 365, voidaan laskea näiden lukujen suhde:

$$\frac{310}{365} = 0{,}849315\ldots$$

Tästä nähdään, että luku 310 on noin $84,9~\%$ luvusta 365, joten luku 310 on noin $100 - 84,9~\% = 15,1~\%$ pienempi kuin luku 365. Huomaa, että jälleen jakana on se luku, johon verrataan.

Toinen tapa saman tuloksen saamiseen on laskea ensin vertailtavien lukujen erotus:

$$365 - 310 = 55.$$

Sen jälkeen lasketaan, kuinka monta prosenttia erotus on siitä luvusta, johon verrataan:

$$\frac{55}{365} = 0{,}15068\ldots$$

Tästä voidaan päätellä, että luku 310 on noin $15,1~\%$ pienempi kuin luku 365.

TEHTÄVÄ 5.19: VERTAILUPROSENTTI

Emmi sai kesätöistään palkkaa 1 150 euroa ja Iida sai 1 225 euroa.

(a) Kuinka monta prosenttia vähemmän palkkaa Emmi sai Iidaan verrattuna? Valitse edellä havainnollistetuista ratkaisutavoista se, joka tuntuu sinusta selkeämmältä ja ratkaise tehtävä sitä käyttäen.

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella. Vertaa tehtävään 17. Mitä eroa näillä kahdella tehtävällä on? Miten se näkyy ratkaisussa? Selitä omin sanoin.

TEHTÄVÄ 5.20: VERTAILUPROSENTTI

Henrik juoksi kesäloman aikana 325 km ja Leo juoksi 303 km.

(a) Kuinka monta prosenttia lyhyemmän matkan Leo juoksi kuin Henrik?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella. Vertaa tehtävään 18. Mitä eroa näillä kahdella tehtävällä on? Miten se näkyy ratkaisussa? Selitä omin sanoin.

Joskus halutaan vertailla prosentteina ilmoitettuja lukuja keskenään. Tällöin vertailu voidaan tehdä joko tutkimalla lukujen suhdetta tai erotusta. Jos lukuja verrataan laskemalla niiden erotus, ilmoitetaan tulos *prosenttiyksikköinä*. Esimerkiksi, jos säästötilin korko on $2,5\ \%$ ja käyttötilin korko $1\ \%$, on korkojen erotus $2,5 - 1 = 1,5$ prosenttiyksikköä. Voidaan sanoa, että säästötilin korko on $1,5$ prosenttiyksikköä korkeampi kuin käyttötilin korko, tai että käyttötilin korko on $1,5$ prosenttiyksikköä matalampi kuin säästötilin korko.

Vertaaminen voidaan tehdä myös suhteen avulla:

$$\frac{1}{2,5} = 0,4,$$

joten käyttötilin korko on $40\ \%$ säästötilin korosta. Käyttötilin korko on siis $100\ \% - 40\ \% = 60\ \%$ pienempi kuin käyttötilin korko. Toisesta näkökulmasta

$$\frac{2,5}{1} = 2,5,$$

joten säästötilin korko on $250\ \%$ käyttötilin korosta. Säästötilin korko on siten $250\ \% - 100\ \% = 150\ \%$ suurempi kuin käyttötilin korko.

TEHTÄVÄ 5.21: PROSENTTIEN VERTAILU

Kuluttajahinnat nousivat vuonna 2000 keskimäärin $3,4\ \%$ ja vuonna 2010 keskimäärin $1,2\ \%$.

(a) Kuinka monta prosenttiyksikköä vähemmän hinnat nousivat vuonna 2010 kuin vuonna 2000?

(b) Kuinka monta prosenttia vähemmän hinnat nousivat vuonna 2010 kuin vuonna 2000?

(c) Kuinka monta prosenttia enemmän hinnat nousivat vuonna 2000 kuin vuonna 2010?

(d) Miksi b- ja c-kohtien vastaukset eroavat toisistaan? Selitä omin sanoin.

PROSENTIT JA MUUTOS

Prosentteja käytetään myös muutoksen suuruuden ilmaisemiseen. Laskutapa on samanlainen kuin vertailtaessa. Erityistä huomiota pitää kiinnittää siihen, että jakajana käytetään alkuperäistä, muutosta edeltävää arvoa. Esimerkiksi jos kunnan väkiluku nousi 5 617 asukkaasta 6 221 asukkaaseen, saadaan väkiluvun muutos pääteltyä suhteesta

$$\frac{6221}{5617} = 1{,}1075307\ldots$$

Tästä nähdään, että uusi väkiluku oli noin $110,8\ \%$ vanhasta väkiluvusta eli väkiluku kasvoi noin $10,8\ \%$. Jakajana käytettiin siis alkuperäistä väkilukua 5 617.

TEHTÄVÄ 5.22: MUUTOSPROSENTTI

Lauri oli kahtena kesänä samassa paikassa työharjoittelijana. Ensimmäisenä kesänä hän sai palkkaa 1 320 euroa ja toisena kesänä 1 410 euroa.

(a) Kuinka monta prosenttia Laurin palkka nousi?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella.

TEHTÄVÄ 5.23: MUUTOSPROSENTTI

Kaisa juoksi kesäkuussa aikana 105 km ja heinäkuussa 77 km.

(a) Kuinka monta prosenttia Kaisan juoksumatka lyheni kesäkuusta heinäkuuhun?

(b) Havainnollista tilannetta piirroksella.

Joissakin tilanteissa tiedetään alkuperäinen arvo ja muutoksen suhteellinen suuruus prosentteina. Tällöin uusi, muuttunut arvo saadaan laskettua kertolaskun avulla. Ensin täytyy kuitenkin päätellä, mikä on muutosprosenttia vastaava kerroin. Esimerkiksi, jos palkka on aluksi 1 450 euroa ja sitä korotetaan $2,5\ \%$, on uusi palkka $102,5\ \%$ vanhaan palkkaan verrattuna. Uusi palkka saadaan siten kertomalla luvulla $1{,}025$:

$$1{,}025 \cdot 1450\,€ = 1486,25\,€.$$

Jos taas pyörän hinta on aluksi 390 euroa ja sitä alennetaan $15\ \%$, on uusi hinta $100 - 15 = 85$ prosenttia vanhasta hinnasta. Uusi hinta saadaan siten kertomalla luvulla $0,85$:

$$0,85 \cdot 390\,€ = 331,50\,€.$$

TEHTÄVÄ 5.24: MUUTOSPROSENTTIA VASTAAVA KERROIN

Millä desimaaliluvulla alkuperäinen hinta pitää kertoa, jos sitä

(a) korotetaan $10\ \%$?

(b) korotetaan $13,7\ \%$?

(c) korotetaan $75\ \%$?

(d) korotetaan $124,5\,\%$?

TEHTÄVÄ 5.25: MUUTTUNUT ARVO

Asunto-osakeyhtiö nosti asuntojen yhtiövastikkeita $16,5\,\%$. Kuinka suuri oli $76,5$ neliömetrin kokoisen asunnon uusi yhtiövastike, jos vastikkeen suuruus oli ennen korotusta $2,10$ euroa neliömetriltä?

TEHTÄVÄ 5.26: MUUTOSPROSENTTIA VASTAAVA KERROIN

Millä desimaaliluvulla alkuperäinen hinta pitää kertoa, jos sitä

(a) alennetaan $10\,\%$?

(b) alennetaan $13,7\,\%$?

(c) alennetaan $75\,\%$?

(d) alennetaan $1,25\,\%$?

TEHTÄVÄ 5.27: MUUTTUNUT ARVO

Työntekijän palkka oli 2745 euroa. Kun hän siirtyi osa-aikaiseksi, aleni hänen palkkansa $18\,\%$. Mikä oli työntekijän uusi palkka?

TEHTÄVÄ 5.28: MUUTTUNUT ARVO

Kuinka monta prosenttia hinta x on noussut tai laskenut, jos uusi hinta on

(a) $0,65x$

(b) $1,07x$

(c) $0,05x$

(d) $1,34x$

TEHTÄVÄ 5.29: PERÄKKÄISET MUUTOKSET

Alennusmyyntien alkaessa 150 euron hintaisen takin hintaa alennettiin $15\,\%$. Kolmen viikon kuluttua kaikista jo alennetuista hinnoista sai vielä $30\,\%$ lisäalennuksen.

(a) Mikä oli takin hinta tällöin?

(b) Kuinka monta prosenttia hinta oli pudonnut alkuperäisestä?

(c) Pystyisitkö selvittämään vastauksen b-kohtaan, jos et tietäisi takin alkuperäistä hintaa? Selitä omin sanoin.

TEHTÄVÄ 5.30: PERÄKKÄISET MUUTOKSET

Maailmanmarkkinahintojen heilahtelun vuoksi polttoaineen hinta nousi ensin $4\ \%$ ja laski kuukauden kuluttua äkillisesti $10\ \%$.

(a) Merkitse polttoaineen alkuperäistä hintaa kirjaimella a. Millä desimaaliluvuilla alkuperäistä hintaa a pitäisi kertoa, että saisi laskettua muuttuneen hinnan? Ilmaise muuttunut hinta kirjaimen a avulla.

(b) Päättele edellisen kohdan avulla, kuinka monta prosenttia hinta oli muuttunut alkuperäiseen hintaan verrattuna. Oliko se noussut vai laskenut?

(c) Tarkista laskusi kokeilemalla, saatko saman lopputuloksen, jos alkuperäinen hinta oli esimerkiksi $a = 1$ euroa / litra.

PROSENTTILASKENNAN STRATEGIOITA

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan ratkaisemaan prosenttilaskentaan liittyviä ongelmia, joiden yleinen ratkaisu vaatii kirjainlausekkeiden käyttämistä. Ratkaisu kuitenkin helpottuu usein, jos ongelman ratkaisee ensin yhdessä erityistapauksessa joillakin itse valitsemillaan luvuilla. Varsinainen ratkaisu on tällöin helpompi muodostaa. Lisäksi tuloksen järkevyyttä voi arvioida vertaamalla eri tavoilla saamiaan tuloksia.

TEHTÄVÄ 5.31: RATKAISUN HAHMOTTELU LUKUARVOILLA

Kun tuotteen hintaa nostettiin 7 %, laski sen menekki 5 %. Tehtävänä on selvittää, kuinka muuttui tuotteen myynnistä saatu rahamäärä.

(a) Piirrä vihkoosi seuraava taulukko:

Ennen korotusta			
Korotuksen jälkeen			

(b) Keksi tuotteelle jokin hinta (euroa/kpl) ja jokin menekki eli myyntimäärä (kappaletta). Laske uusi hinta ja menekki hinnankorotuksen jälkeen. Täydennä nämä tiedot taulukkoon.

(c) Laske tuotteen myynnistä saatu rahamäärä ennen hinnankorotusta ja hinnankorotuksen jälkeen. Mitä laskutoimitusta käytit?

(d) Laske, kuinka monta prosenttia tuotteen myynnistä saatu rahamäärä muuttui. Kasvoiko vai pienenikö se?

TEHTÄVÄ 5.32: RATKAISU PROSENTTILAUSEKKEITA KÄYTTÄEN

Kun tuotteen hintaa nostettiin 7 %, laski sen menekki 5 %. Tehtävänä on selvittää, kuinka muuttui tuotteen myynnistä saatu rahamäärä.

(a) Piirrä vihkoosi seuraava taulukko:

Ennen korotusta			
Korotuksen jälkeen			

(b) Merkitse tuotteen alkuperäistä hintaa kirjaimella a (euroa) ja menekkiä kirjaimella b (kappaletta). Laske uusi hinta ja menekki hinnankorotuksen jälkeen.

(c) Laske tuotteen myynnistä saatu rahamäärä ennen hinnankorotusta ja hinnankorotuksen jälkeen. Tarvittaessa katso mallia lausekkeiden muodostamiseen edellisen tehtävän ratkaisusta.

(d) Laske, miten tuotteen myynnistä saatu rahamäärä muuttui.

TEHTÄVÄ 5.33: RATKAISUN HAHMOTTELU LUKUARVOILLA

Tuotteen hintaa alennettiin 25 %. Tehtävänä on selvittää, kuinka monta prosenttia alennettua hintaa pitäisi korottaa, jotta päästäisiin takaisin alkuperäiseen hintaan.

(a) Piirrä vihkoosi seuraava taulukko:

(b) Keksi tuotteelle jokin alkuperäinen hinta (euroa). Laske, mikä oli tuotteen hinta hinnanalennuksen jälkeen.

(c) Laske, kuinka paljon alennettua hintaa pitäisi korottaa, jotta päästäisiin takaisin alkuperäiseen hintaan. Täydennä tämä tieto taulukkoon. Mitä laskutoimitusta käytit?

(d) Selvitä, kuinka monta prosenttia korotus on alennettuun hintaan verrattuna.

TEHTÄVÄ 5.34: RATKAISU PROSENTTILAUSEKKEITA KÄYTTÄEN

Tuotteen hintaa alennettiin 25 %. Tehtävänä on selvittää, kuinka monta prosenttia alennettua hintaa pitäisi korottaa, jotta päästäisiin takaisin alkuperäiseen hintaan.

(a) Piirrä vihkoosi seuraava taulukko:

(b) Merkitse tuotteen alkuperäistä hintaa kirjamella a (euroa). Laske, mikä oli tuotteen hinta hinnanalennuksen jälkeen.

(c) Laske, kuinka paljon alennettua hintaa pitäisi korottaa, jotta päästäisiin takaisin alkuperäiseen hintaan. Täydennä tämä tieto taulukkoon. Tarvittaessa katso mallia lausekkeen muodostamiseen edellisen tehtävän ratkaisusta.

(d) Selvitä, kuinka monta prosenttia korotus on alennettuun hintaan verrattuna.

(e) Keksitkö tavan, jolla tehtävän voi ratkaista pelkästään alkuperäisen hinnan ja alennetun hinnan avulla (ilman korotuksen lausekkeen muodostamista)?

TEHTÄVÄSARJA II

TEHTÄVÄ 5.35: PROSENTTIOSUUS

Henkilön kuukausipalkka on 3800 euroa ja hän maksaa veroja 900 euroa. Mikä on henkilön veroprosentti eli kuinka monta prosenttia hän maksaa veroja?

VASTAUS

Noin 23,7 %.

TEHTÄVÄ 5.36: PROSENTTIOSUUS

Henkilö haluaa lisätä ravintokuituja ruokavalioonsa. Hänellä on valittavanaan kaksi leipävaihtoa. Leivän A 20 gramman palassa on 3 grammaa ravintokuitua ja leivän B kuitupitoisuus on 13 %. Kumpi leivistä henkilön kannattaa ostaa?

VASTAUS

Leipä A, koska sen kuitupitoisuus on 15 %.

TEHTÄVÄ 5.37: PROSENTTIOSUUTTA VASTAAVA MÄÄRÄ

Jääkiekkomaalivahdin torjuntaprosentti on 85,70. Kuinka monta maalia hän keskimäärin torjuu 30 laukauksesta?

VASTAUS

Noin 26.

TEHTÄVÄ 5.38: PROSENTTIOSUUTTA VASTAAVA MÄÄRÄ

Tilastokeskuksen mukaan vuoden 2015 lopussa suomea äidinkielenään puhuvia oli 88,7 % ja ruotsia 5,3 %. Kuinka moni puhui äidinkielenään jotain muuta kieltä, kun suomalaisia oli tuolloin 5 487 000?

VASTAUS

329 220

TEHTÄVÄ 5.39: KOKONAISMÄÄRÄ

Farkut olivat 30 prosentin alennuksessa ja euroina alennus oli 25 euroa. Kuinka paljon farkut maksoivat alun perin?

VASTAUS

83,30 euroa.

TEHTÄVÄ 5.40: KOKONAISMÄÄRÄ

Kevään 2016 ylioppilaskokeisiin ilmoittautuneista 25,7 % ilmoittautui pitkän matematiikan kokeeseen. Pitkän matematiikan kokeeseen ilmoittautuneita oli 10 536. Kuinka monta henkilöä ilmoittautui kevään 2016 ylioppilaskokeisiin? Anna vastaus 100 henkilön tarkkuudella.

VASTAUS

41 000

TEHTÄVÄ 5.41: VERTAILUPROSENTTI

Suomen väkiluku maaliskuussa 2016 oli 5 488 265 ja Ruotsin 9 875 378.

(a) Kuinka monta prosenttia vähemmän asukkaita on Suomessa kuin Ruotsissa?

(b) Kuinka monta prosenttia enemmän asukkaita on Ruotsissa Suomeen verrattuna?

VASTAUS

(a) Noin 44,4 % vähemmän.

(b) Noin 79,9 % enemmän.

TEHTÄVÄ 5.42: VERTAILUPROSENTTI

Kevään 2016 ylioppilaskokeiden lyhyen matematiikan kokeeseen ilmoittautui 11 663 ja pitkän matematiikan kokeeseen 10 536 kokelasta. Kuinka monta prosenttia enemmän lyhyen matematiikan kokeseen ilmoittautuneita oli pitkän matematiikan kokeeseen ilmoittautuneihin verrattuna?

VASTAUS

10,7 %

TEHTÄVÄ 5.43: PROSENTTIEN VERTAILU

Asuntolainan korkoprosentti laski 3,4 prosentista 2,6 prosenttiin.

(a) Kuinka monta prosenttiyksikköä asuntolainan korko laski?

(b) Kuinka monta prosenttia asuntolainan korko laski?

VASTAUS

(a) 0,8 prosenttiyksikköä.

(b) Noin 23,5 %.

TEHTÄVÄ 5.44: PROSENTTIEN VERTAILU

Vuoden 2015 vaaleissa perussuomalaisten kannatus oli 17,7 % ja heinäkuussa 2016 Taloustutkimuksen teettämän gallupin mukaan 8,6 %.

(a) Kuinka monta prosenttiyksikköä perussuomalaisten kannatus laski tarkasteluaikavälillä?

(b) Kuinka monta prosenttia perussuomalaisten kannatus laski tarkasteluaikavälillä?

VASTAUS

(a) 9,1 prosenttiyksikköä

(b) 51,4 %

TEHTÄVÄ 5.45: MUUTOSPROSENTTI

Asunto maksoi 120 000 euroa vuonna 2005. Vuonna 2016 asunto myytiin 180 000 eurolla. Kuinka monta prosenttia asunnon arvo oli noussut?

VASTAUS

50 %.

TEHTÄVÄ 5.46: MUUTOSPROSENTTI

Vuonna 2007 matematiikan ylioppilaskokeeseen ilmoittautui 13 348 kokelasta, kun vuonna 2015 ilmoittautumisia oli vain 11 956. Kuinka monta prosenttia pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen ilmoittautuneiden määrä on vähentynyt?

VASTAUS

10,4 %

TEHTÄVÄ 5.47: MUUTTUNUT ARVO

Television hinta oli 459 euroa. Aluksi sen hintaa laskettiin 20 %, mutta koska sen kysyntä kasvoi alennuksen myötä voimakkaasti, myyjä päätti korottaa hintaa 20 %.

(a) Kuinka paljon televisio maksoi halvimmillaan?

(b) Mikä oli television hinta kaikkien hinnanmuutosten jälkeen?

(c) Päteekö yleisesti, että jos hintaa ensin lasketaan p % ja sen jälkeen nostetaan p %, niin päädytään alkuperäiseen hintaan? Perustele omin sanoin.

VASTAUS

(a) 367,20 euroa.

(b) 440,64 euroa.

TEHTÄVÄ 5.48: PERÄKKÄISET MUUTOKSET

Paita maksoi ennen alennusmyyntejä 60 €. Hintaa alennettiin ensin 40 prosenttia ja alen loppurysäyksessä vielä 20 prosenttia. Kuinka paljon paita lopuksi maksoi?

VASTAUS

28,80€ (tai 29 €)

TEHTÄVÄ 5.49: PERÄKKÄISET MUUTOKSET

Osakkeen arvo laski 46 prosenttia ja nousi sitten ensiksi 15 prosenttia ja tämän jälkeen vielä 34 prosenttia.

(a) Oliko osakkeen arvo näiden muutosten jälkeen suurempi vai pienempi kuin ennen muutoksia?

(b) Kuinka monta prosenttia jälkimmäisen nousun olisi pitänyt olla, jotta olisi palattu alkuperäiseen arvoon? [Lyhyt S2001/5]

VASTAUS

(a) Pienempi.

(b) 61 %

TEHTÄVÄ 5.50: PROSENTTILASKENNAN STRATEGIOITA

Viisi kilogrammaa 2-prosenttista suolaliuosta sisältää ainoastaan vettä ja suolaa. Tätä suolaliuosta haihdutetaan niin, että sen massasta poistuu 20 %.

(a) Kuinka paljon suolaa on alkuperäisessä suolaliuoksessa?

(b) Mikä on haihdutetun liuoksen massa?

(c) Kuinka paljon suolaa on haihdutetussa suolaliuoksessa?

(d) Mikä on haihdutetun suolaliuoksen suolapitoisuus?

(e) Mieti, miten alkuperäinen suolaliuoksen määrä vaikutti uuteen suolapitoisuuteen. Selitä omin sanoin.

VASTAUS

(a) 0,1 kg tai 100 g

(b) 4 kg

(c) 0,1 kg tai 100 g

(d) 2,5 %

(e) Ei mitenkään.

TEHTÄVÄ 5.51: PROSENTTILASKENNAN STRATEGIOITA

Kuinka paljon 2-prosenttista desinfektioliuosta tarvitaan, jotta siitä laimennettuna saadaan 500 ml 0,35-prosenttista desinfektioliuosta? [Lyhyt S2006/3]

VASTAUS

87,5 ml

TEHTAVA 5.52: PROSENTTILASKENNAN STRATEGIOITA

Perheen vuokramenot olivat 25 % tuloista. Vuokramenot nousivat 15 %. Kuinka monta prosenttia vähemmän rahaa riitti muuhun käyttöön korotuksen jälkeen? [Pitkä K2004/3]

Vihje: Hahmottele ensin tehtävän tietoja taulukkoon lukuarvoilla kuten tehtävässä 31.

VASTAUS

5 %

TEHTÄVÄSARJA III

TEHTÄVÄ 5.53:

Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %? [Lyhyt K2014/5]

VASTAUS

2,0 litraa

TEHTÄVÄ 5.54:

Erään mehun täysmehupitoisuus on 35 %. Litraan mehua lisätään 0,5 litraa vettä. Mikä on laimennetun mehun täysmehupitoisuus?

VASTAUS

Noin 30,4 %.

TEHTÄVÄ 5.55:

Hotellihuoneiden hintaa nostettiin 15 %, jolloin kävijämäärä laski 10 %. Miten hotellihuoneista saatavat tulot muuttuivat?

VASTAUS

Tulot kasvoivat 3,5 %.

TEHTÄVÄ 5.56:

Vuonna 2007 alennettiin parturimaksujen arvonlisäveroa 22 prosentista 8 prosenttiin. Jos alennus olisi siirtynyt täysimääräisenä parturimaksuihin, kuinka monta prosenttia ne olisivat alentuneet? Arvonlisävero ilmoitetaan prosentteina verottomasta hinnasta ja se on osa tuotteen tai palvelun hintaa. [Pitkä K2008/4]

VASTAUS

11,5 %

TEHTÄVÄ 5.57:

2-prosenttista suolaliuosta haihdutetaan, jotta siitä saadaan 5-prosenttista suolaliuosta.

(a) Kuinka monta prosenttia suolaliuoksen massasta pitää haihduttaa pois?

(b) Kuinka monta prosenttia suolaliuoksen vedestä pitää haihduttaa pois?

(c) Miksi edellisten kohtien vastaukset eivät ole samat? Selitä omin sanoin.

VASTAUS

(a) 60 %

(b) Noin 61,2 %

TEHTÄVÄ 5.58:

Tuoreissa omenissa on vettä 80 % ja sokeria 4 %. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20? [Pitkä K2000/4]

VASTAUS

16 %

TEHTÄVÄ 5.59:

Kesämokin rakentaminen tuli 25 % arvioitua kalliimmaksi. Rakennustarvikkeet olivat 19 % ja muut kustannukset 28 % arvioitua kalliimpia. Mikä oli rakennustarvikkeiden arvioitu osuus ja mikä lopullinen osuus kokonaisukustannuksista? [Pitkä K2006/4]

VASTAUS

Arvioitu osuus 33 % ja lopullinen osuus 32 %.

TEHTÄVÄ 5.60:

Vuonna 2001 erään liikeyrityksen ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo kasvoi 10 % vuoteen 2000 verrattuna. Samaan aikaan myynnin arvo kotimaassa väheni 5 %. Tällöin koko myynnin arvo kasvoi 6 %. Laske, kuinka monta prosenttia myynnistä meni vuonna 2000 ulkomaille. [Pitkä K2002/3]

VASTAUS

73 %

TEHTÄVÄ 5.61:

Verotettavan osuuden arvo, €	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla, €	Vero alarajan ylimenevästä osasta, %
20 000–40 000	100	8
40 000–60 000	1 700	11
60 000–200 000	3 900	14
200 000–1 000 000	23 500	17
1 000 000–	159 500	20

(Perintö- ja lahjaverolaki, 378/1940, § 14)

(a) Annika sai 58 000 € perintönä. Kuinka monta euroa Annika maksaa perinnöstä veroa? Mikä on hänen perintöveroprosenttinsa?

(b) Piirrä kuvaaja, josta käy ilmi perintöveron suuruus prosentteina perinnön arvon funktiona, kun perinnön suuruus on välillä 0 € ja 60 000 €.

[Lyhyt K2016/10]

VASTAUS

(a) Noin 6,3 %.

(b)

TEHTÄVÄ 5.62:

Abiturientti saa lahjoituksen, jonka suuruus on verojen jälkeen 12 000 €. Hän sijoittaa sen vuodeksi kahteen rahastoon, joiden vuotuiset korot ovat verojen jälkeen 3,5 % ja 5,5 %.

(a) Lahjoituksesta x euroa sijoitetaan 3,5 % tuoton tarjoavaan rahastoon ja loput toiseen rahastoon. Esitä koko sijoituksen arvo y muuttujan x avulla lausuttuna, kun $0 \leq x \leq 12\,000$.

(b) Piirrä a-kohdan funktion kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 12\,000$.

[Lyhyt S2013/14]

VASTAUS

(a) $y = -0,02x + 12660$

(b)

ITSEARVIOINTITEHTÄVÄT

Varmista, että olet oppinut tämän luvun keskeiset asiat tekemällä itsearviointitesti opetus.tv:n polku-palvelussa. Samalla harjoittelet omien ratkaisujesi pisteyttämistä pisteytysohjeiden avulla.